2005年度　線形代数II　中間試験解答

問題1

(A,B) が内積の性質 (R1) 〜 (R4) を満たすことを示す。$({}^tAB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki}b_{kj}$ に注意すると，

(R1) $\mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}b_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki}a_{ki} = \sum_{k=1}^n ({}^tBA)_{kk} = \mathrm{Tr}({}^tBA) = (B,A)$ より成り立つ。

(R2) $(A+B,C) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{ki}+b_{ki})c_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}c_{ki} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ki}c_{ki} = (A,C)+(B,C)$ より成り立つ。

(R3) k をスカラーとするとき，$(ka,b) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n ka_{ki}b_{ki} = k\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}b_{ki} = k(A,B)$ より成り立つ。

(R4) $(A,A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{ki})^2 \geq 0$。また，$(A,A)=0$ とすると，$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{ki})^2 = 0$ よりすべての k,i に対して $a_{ki}=0$。よって (R4) も成り立つ。

以上より，(R1) 〜 (R4) のすべてが成り立つので，(A,B) は内積である。

問題2

$f_0(x)=1, f_1(x)=x, f_2(x)=x^2$ としてグラム・シュミットの正規直交化を行うと，次のようになる。

$$e_0 = \frac{f_0}{\parallel f_0 \parallel} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot 1\cdot e^{-x^2}\,dx}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \tag{1}$$

$$e_1' = f_1 - (e_0,f_1)e_0 = x \tag{2}$$

$$e_1 = \frac{e_1'}{\parallel e_1' \parallel} = \frac{x}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot x\cdot e^{-x^2}\,dx}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}x \tag{3}$$

$$e_2' = f_2 - (e_0,f_2)e_0 - (e_1,f)e_1 = x^2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot x^2\cdot e^{-x^2}\,dx\cdot 1 = x^2-\frac{1}{2} \tag{4}$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\parallel e_2' \parallel} = \frac{x^2-\frac{1}{2}}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2 e^{-x^2}\,dx}} = \frac{x^2-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left(x^2-\frac{1}{2}\right) \tag{5}$$

e_0, e_1, e_2 が正規直交基底である。

問題3

(1) $f,g \in \mathbf{R}[x]_2$ とし，k をスカラーすると，

$$\begin{aligned}
F(f+g) &= \frac{1}{2}(x^2-1)\frac{d^2\{f(x)+g(x)\}}{dx^2} - x\frac{d\{f(x)+g(x)\}}{dx} + \{f(x)+g(x)\} \\
&= \left\{\frac{1}{2}(x^2-1)\frac{d^2f(x)}{dx^2} - x\frac{df(x)}{dx} + f(x)\right\} + \left\{\frac{1}{2}(x^2-1)\frac{d^2g(x)}{dx^2} - x\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\right\} \\
&= F(f)+F(g) \qquad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(kf) &= \frac{1}{2}(x^2-1)\frac{d^2\{kf(x)\}}{dx^2} - x\frac{d\{kf(x)\}}{dx} + \{kf(x)\} \\
&= k\left\{\frac{1}{2}(x^2-1)\frac{d^2f(x)}{dx^2} - x\frac{df(x)}{dx} + f(x)\right\} \\
&= kF(f) \qquad (7)
\end{aligned}$$

よって F は線形写像である。

(2) 基底の要素 $1, x, x^2$ に対する F の作用を求めると，

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ F(x) &= -x + x = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ F(x^2) &= (x^2-1) - x\cdot 2x + x^2 = -1 = -1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \end{aligned} \tag{8}$$

したがって，

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

となる。

(3) $\mathbf{a} = ^t (a_0, a_1, a_2)$ とおくと，

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \in \mathrm{Ker}\, A_F \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad a_0 - a_2 = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

よって，a_0, a_1 を任意の数とするとき，$\mathrm{Ker}\, A_F$ の任意の元は $^t(a_0, a_1, a_0)$ と書ける。したがって，たとえば，

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

が基底である。

(4) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に対応する $\mathbf{R}[x]_2$ の元は，それぞれ $1 + x^2, x$ である。これらが $\mathrm{Ker}\, F$ の基底である。したがって，$\mathrm{Ker}\, F$ の次元は 2 である。

(5) $\mathrm{Ker}\, F$ の任意の元は，小問 (4) で求めた基底の線形結合となるから，2 つの任意パラメータ a, b を用いて $a + bx + ax^2$ と書ける。

(6) 小問 (5) で求めた式に F を作用させ，0 になることを確かめればよい。

$$\begin{aligned} F(a + bx + ax^2) &= \frac{1}{2}(x^2-1)\cdot 2a - x\cdot(b + 2ax) + (a + bx + ax^2) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

したがって，小問 (5) で求めた式は微分方程式の解となっている。