2005年度　線形代数II　期末試験

- 大問題ごとに解答用紙を1枚使うこと。
- 解答用紙には，氏名，学籍番号，大問題の番号を記入すること。

問題1

A を $n \times n$ の実対称行列，λ をその1つの固有値とし，λ に属する固有ベクトルの集合を V とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) V は線形空間であることを示せ。

(2) V の直交補空間を $V^{\perp}$ とする。$V^{\perp}$ は線形空間であることを示せ。

(3) 任意のベクトル $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ に対し，$\mathbf{y} \in V^{\perp}$ ならば $A\mathbf{y} \in V^{\perp}$ であることを示せ。

問題2

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ を $\mathbf{R}^3$ に属する定数ベクトルとする。$\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ 自身への写像を

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\,\mathbf{a} \tag{1}$$

と定義するとき，次の問に答えよ。

(1) f は，ある点 $\mathbf{x}_0$ を，原点を通り $\mathbf{a}$ に垂直な平面に対して鏡像の位置に移すことを示せ。
（ヒント： $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ とするとき，ベクトル $\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0$ がこの平面の法線に平行で，かつ $\mathbf{x}_0$ と $\mathbf{y}_0$ の中点がこの平面上にあることを示す。）

(2) f は線形変換であることを示せ。

(3) f は直交変換であることを示せ。

問題3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

とするとき，次の問に答えよ。

(1) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。

(2) 正則行列 P，対角行列 D によって $P^{-1}AP = D$ と対角化を行うとき，P，D を求めよ。

(3) n を正の整数とするとき，A^n を計算せよ（A^n の各要素を n の関数として表せ）。