2005 年度　線形代数 II　期末試験解答

問題 1

(1) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ とし，c をスカラーとするとき，

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2 = \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), \tag{1}$$

$$A(c\mathbf{x}_1) = cA\mathbf{x}_1 = c\lambda\mathbf{x}_1 = \lambda(c\mathbf{x}_1). \tag{2}$$

よって V は線形空間である。

(2) $\mathbf{x} \in V$，$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V^{\perp}$ とし，c をスカラーとするとき，

$$(\mathbf{x}, (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) = 0 + 0 = 0, \tag{3}$$

$$(\mathbf{x}, c\mathbf{y}_1) = \bar{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) = \bar{c} \cdot 0 = 0. \tag{4}$$

よって $V^{\perp}$ は線形空間である。

(3) $\mathbf{x} \in V$，$\mathbf{y} \in V^{\perp}$ とする。A が実対称行列であることより $A^H = A$ であるから，

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (A^H\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \tag{5}$$

よって $A\mathbf{y} \in V^{\perp}$ となる。

問題 2

(1) $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ とするとき，ベクトル $\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0$ がこの平面の法線 $\mathbf{a}$ に平行で，かつ $\mathbf{x}_0$ と $\mathbf{y}_0$ の中点が平面 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0$ 上にあることを示せばよい。

$$\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \frac{2\,\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\,\mathbf{a} - \mathbf{x}_0 = -\frac{2\,\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\,\mathbf{a}, \tag{6}$$

$$\mathbf{a} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0}{2}\right) = \mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{x}_0 - \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\,\mathbf{a}\right) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_0 - \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\ \|\,\mathbf{a}\,\|^2 = 0. \tag{7}$$

よって示せた。

(2) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^3$ とし，c をスカラーとするとき，

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \frac{2\,(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\,\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \frac{2\,\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\,\mathbf{a} - \frac{2\,\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\,\mathbf{a} \\
&= f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2), \qquad (8) \\
f(c\mathbf{x}_1) &= c\mathbf{x}_1 - \frac{2\,(c\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\,\mathbf{a} = c\mathbf{x}_1 - c\frac{2\,\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\,\mathbf{a} = cf(\mathbf{x}_1). \qquad (9)
\end{aligned}$$

よって f は線形変換である。

(3) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^3$ とするとき，

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1) \cdot f(\mathbf{x}_2) &= \left(\mathbf{x}_1 - \frac{2\,\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\,\mathbf{a}\right) \cdot \left(\mathbf{x}_2 - \frac{2\,\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\,\mathbf{a}\right) \\
&= \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 - 2\frac{2\,\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_2 - 2\frac{2\,\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\,\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{a} + \frac{2\,\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\ \frac{2\,\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{a}}{\|\,\mathbf{a}\,\|^2}\ \|\,\mathbf{a}\,\|^2 \\
&= \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2. \qquad (10)
\end{aligned}$$

よって f は直交変換である。

問題 3

(1)

$$\begin{aligned}\det(\lambda E - A) &= \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -4 \\ -4 & \lambda-2 & -5 \\ -2 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) - 4\cdot 2(\lambda-2) \\ &= (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+3-8) \\ &= (\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+1). \end{aligned} \tag{11}$$

よって固有値は $\lambda = -1, 2, 5$ である。
固有値 -1 に属する固有ベクトルを $\mathbf{x} =^t [x_1, x_2, x_3]$ とすると，

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 4 \\ 4 & 2+1 & 5 \\ 2 & 0 & 3+1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

これを解くと,（定数倍の任意性はあるが）$\mathbf{x} =^t [2, -1, -1]$ となる。
同様にして，固有値 2 に属する固有ベクトルは ${}^t[0, 1, 0]$，固有値 5 に属する固有ベクトルは ${}^t[1, 3, 1]$ となる。

(2) 固有値がすべて異なるから，A は固有ベクトルを横に並べた行列 P によって対角化でき，そのとき対角行列 D の対角成分には固有値が（固有ベクトルと同じ順番で）並ぶ。したがって，

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{13}$$

となる。

(3) $P^{-1}AP = D$ より，$A = PDP^{-1}$。そこで，P^{-1} を計算すると，

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned} A^n &= (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) = PD^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)^n + 5^n & 0 & -2\cdot(-1)^n + 2\cdot 5^n \\ -(-1)^n - 2\cdot 2^n + 3\cdot 5^n & 3\cdot 2^n & (-1)^n - 7\cdot 2^n + 6\cdot 5^n \\ -(-1)^n + 5^n & 0 & (-1)^n + 2\cdot 5^n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

となる。