2005 年度　線形代数 II　第 2 回レポート 課題

2006 年 1 月 13 日（金）の授業終了時に提出してください。あるいは，それ以前に工学部 3 号館 205 号室に提出してください。

問題 1

(1) F を線形空間 V から V 自身への直交変換とする。このとき，F は V の 2 つの元の間の距離を保存すること，すなわち，$x, y \in V$ ならば $\| F(x) - F(y) \| = \| x - y \|$ であることを示せ。

(2) ユニタリ行列の固有値は，絶対値 1 の複素数であることを示せ。

(3) H をエルミート行列とし，$E + iH$ が正則であるとする。このとき，$U = (E - iH)(E + iH)^{-1}$ とおくと，U はユニタリ行列となることを示せ。
（ヒント： U がユニタリ行列の定義を満たすことを示す。$E + iH$ と $E - iH$ は交換可能であることを使うこと。）

問題 2

行列

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

による xy 平面上の変換

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2}$$

は，直線 $y = \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) x$ に関する折り返しであることを示せ。
（ヒント： 折り返しとなるための条件を，図を描いて考えよ。点 (x, y) と点 (x', y') とを結ぶ線分が直線 $y = \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) x$ に垂直であり，かつ，線分の中点がこの直線上にあればよい。）

問題 3

行列

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \tag{3}$$

による xy 平面上の変換

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{4}$$

を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $-2 \leq x \leq 2$，$-2 \leq y \leq 2$ を満たし，座標が整数であるすべての点に対し，この変換による点の移動の様子を，教科書の図 6.2 と同様に矢印で表せ。

(2) 小問 (1) の結果より，A のすべての固有ベクトルと，それに対応する固有値を推定せよ。

(3) 固有方程式 $\det(\alpha E - A) = 0$ を解くことにより，A の固有値・固有ベクトルの組をすべて求めよ。また，これらが小問 (2) の結果と一致することを確認せよ。