2003 年度　応用数学試験問題　解答

問題 1

(1)　$f(x)$ を初期値 x_0 の周りでテイラー展開すると，

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + O((x - x_0)^2) \tag{1}$$

となる。上式の右辺第 2 項までを取って $f(x)$ の近似式とし，$f(x) = 0$ となる点を求めると，

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{2}$$

となる。従って反復式は次のようになる。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3}$$

(2)　ニュートン法による近似解 x_n と真の解 α との差を $e_n = x_n - \alpha$ とすると，

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\alpha + e_n) \\ &= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2}f''(\alpha)e_n^2 + O(e_n^3) \\ &= f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2}f''(\alpha)e_n^2 + O(e_n^3) \end{aligned} \tag{4}$$

また，

$$f'(x_n) = f'(\alpha) + f''(\alpha)e_n + O(e_n^2) \tag{5}$$

反復式 (3) の両辺から α を引いて (4)，(5) 式を代入すると，

$$\begin{aligned} e_{n+1} &\simeq e_n - \frac{f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2}f''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha) + f''(\alpha)e_n} \\ &= \frac{f'(\alpha)e_n + f''(\alpha)e_n^2 - f'(\alpha)e_n - \frac{1}{2}f''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha) + f''(\alpha)e_n} \\ &\simeq \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\, e_n^2 \end{aligned} \tag{6}$$

従ってニュートン法は 2 次収束する。

(3)　$f(x)$ のテイラー展開を 2 次の項まで取ると，

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \tag{7}$$

右辺を 0 とおくと，x に関する次の方程式ができる。

$$f(x_0) + (x - x_0)\left\{f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)\right\} = 0 \tag{8}$$

これは x に関する 2 次方程式であるが，$\{\ \}$ の中の x を (2) 式を用いて近似すると，

$$\begin{aligned} f(x_0) + (x - x_0)\left\{f'(x_0) - \frac{1}{2}f''(x_0)\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right\} &= 0 \\ x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0) - \frac{f(x_0)f''(x_0)}{2f'(x_0)}} & \end{aligned} \tag{9}$$

従って反復式は次のようになる。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)}} \tag{10}$$

(4)　$f(x) = x^2 - 2$ のとき $f'(x) = 2x$，$f''(x) = 2$ となる。
$x_0 = 2$ から出発すると，ニュートン法では，

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \frac{2^2 - 2}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2} = 1.5 \\ x_2 &= \frac{3}{2} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{17}{12} = 1.416666\ldots \end{aligned} \tag{11}$$

一方，$f''(x)$ も含む方法では，

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \frac{2^2 - 2}{2 \cdot 2 - \frac{(2^2-2)\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2}} = \frac{10}{7} = 1.428571\ldots \\ x_2 &= \frac{10}{7} - \frac{\left(\frac{10}{7}\right)^2 - 2}{2 \cdot \left(\frac{10}{7}\right) - \frac{\left(\left(\frac{10}{7}\right)^2 - 2\right)\cdot 2}{2\cdot 2\cdot \frac{10}{7}}} = \frac{1970}{1393} = 1.414213\ldots \end{aligned} \tag{12}$$

これらを真の解 $x = \sqrt{2} = 1.414213\ldots$ と比べると，$f''(x)$ を使う方法のほうが格段に収束が速いことがわかる。

問題 2

(1)　$y = \frac{dx}{dt}$ とおいて新しい従属変数 y を導入すると（授業ノート p. 51 参照），方程式は次の 2 元連立 1 階常微分方程式に書き直せる。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

(2)　第 n ステップにおける x，y に対する数値解をそれぞれ x_n，y_n とすると，上記の連立常微分方程式に対するオイラー法の反復式は次のようになる（授業ノート p. 52 参照）。

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n - hx_n \end{cases} \tag{14}$$

(3)　1 変数の常微分方程式 $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ の場合，ホイン法の反復式は次の 3 つのステップからなる。

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{n+1} &= x_n + hf(t_n, x_n) \\ \tilde{f}_{n+1} &= f(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}) \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}\left\{f(t_n, x_n) + \tilde{f}_{n+1}\right\} \end{aligned} \tag{15}$$

これを 2 元連立 1 階常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \end{cases} \tag{16}$$

に拡張すると，次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{n+1} &= x_n + hf(t_n, x_n, y_n) \\ \tilde{y}_{n+1} &= y_n + hg(t_n, x_n, y_n) \\ \tilde{f}_{n+1} &= f(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) \\ \tilde{g}_{n+1} &= g(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}\left\{f(t_n, x_n, y_n) + \tilde{f}_{n+1}\right\} \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\left\{g(t_n, x_n, y_n) + \tilde{g}_{n+1}\right\} \end{aligned} \tag{17}$$

ここで，いま解きたい方程式では $f(t,x,y)=y$，$g(t,x,y)=-x$ であるから，これを (17) 式に代入すると，計算式は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_{n+1} &= x_n + h y_n \\
\tilde{y}_{n+1} &= y_n - h x_n \\
\tilde{f}_{n+1} &= \tilde{y}_{n+1} \\
\tilde{g}_{n+1} &= -\tilde{x}_{n+1} \\
x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}\left\{y_n + \tilde{f}_{n+1}\right\} \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\left\{-x_n + \tilde{g}_{n+1}\right\}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

中間変数 $\tilde{x}_{n+1}$，$\tilde{y}_{n+1}$，$\tilde{f}_{n+1}$，$\tilde{g}_{n+1}$ を消去して簡単化すると，

$$
\begin{cases}
x_{n+1} = \left(1 - \frac{h^2}{2}\right) x_n + h y_n \\
y_{n+1} = -h x_n + \left(1 - \frac{h^2}{2}\right) y_n
\end{cases}
\tag{19}
$$

となる。これがホイン法の反復式である。

(4) 反復式 (19) は行列形式で書くと次のようになる。

$$
\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{h^2}{2} & h \\ -h & 1 - \frac{h^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}
\tag{20}
$$

したがってホイン法を n ステップ実行して得られる解を求めるには，右辺の行列のべき乗を計算すればよい。そのため，行列の対角化を行う。この行列を A と書くと，A の固有方程式は，

$$
\lambda^2 - 2\left(1 - \frac{h^2}{2}\right)\lambda + \left(1 - \frac{h^2}{2}\right)^2 + h^2 = 0
\tag{21}
$$

これを解くと，

$$
\lambda_{\pm} = 1 - \frac{h^2}{2} \pm ih
\tag{22}
$$

ただし，i は虚数単位を表す。また，$\lambda_{\pm}$ に対応する固有ベクトルは $(1, \pm i)^t$ であることがわかる。したがって行列 A は次のように対角化できる。

$$
A = B \Lambda B^{-1}
\tag{23}
$$

ただし，

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}
\tag{24}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
&= B \Lambda^n B^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_+^n + \lambda_-^n) \\ \frac{i}{2}(\lambda_+^n - \lambda_-^n) \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

(22) 式，(25) 式より，ホイン法を n ステップ実行して得られる解を n と h の関数として表すことができた。

この問題での解析解は $x=\cos(t)$ であるから，$x(t)$ は周期関数となる。ところが，ホイン法で得られる数値解に対しては，(22) 式，(25) 式より，

$$
\begin{aligned}
x_n^2+y_n^2 &= \frac{1}{4}(\lambda_+^n+\lambda_-^n)^2-\frac{1}{4}(\lambda_+^n-\lambda_-^n)^2 \\
&= \lambda_+^n\lambda_-^n \\
&= (\lambda_+\lambda_-)^n \\
&= \left(1+\frac{h^4}{4}\right)^n \qquad (26)
\end{aligned}
$$

であり，これは 1 ステップ毎に大きくなっていく。したがって，ホイン法による解は周期関数とはなり得ない。これがホイン法の適用によって失われる重要な性質である。

問題 3

(1)　中心差分を使った差分近似の式は次のようになる（授業ノート p. 62 参照）。

$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h^2}=f(x_i,y_j) \qquad (27)$$

(2)　x 方向，y 方向の格子点数はそれぞれ 5 で，両端は境界条件により与えられているから，変数は 3×3 の 9 個で，A は 9×9 の行列となる。A の具体的な形は次のようになる（0 の要素は省いて書いた）。

$$A=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}
-4 & 1 & & 1 & & & & & \\
1 & -4 & 1 & & 1 & & & & \\
 & 1 & -4 & & & 1 & & & \\
1 & & & -4 & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & -4 & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 1 & -4 & & & 1 \\
 & & & 1 & & & -4 & 1 & \\
 & & & & 1 & & 1 & -4 & 1 \\
 & & & & & 1 & & 1 & -4
\end{pmatrix} \qquad (28)$$

(3)　A は対称行列で，かつ半帯幅が $N-2$ の帯行列である。

(4)　サイズ n，半帯幅 b の帯行列を上三角行列に変換するための計算量はほぼ $2b^2n$ である（授業ノート p. 75 参照）。ここでは行列のサイズが $(N-2)^2$，半帯幅が $N-2$ であるから，これらを代入することにより，計算量はほぼ $2N^4$ となる。さらに，行列の対称性を利用することにより計算量を半分に減らすことができ（授業ノート p. 76 参照），最終的な計算量は約 N^4 となる。