080121160　鳥越武史

問題 1

(1)オイラー法により、

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

(2)(1)の結果と、(2)式、

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + ch^2$$

との両辺の差をとり、三角不等式を使うと、

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) - y_{i+1} &= y(x_i) - y_i + h\{f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)\} + ch^2 \\ \Leftrightarrow |y(x_{i+1}) - y_{i+1}| &= |y(x_i) - y_i + h\{f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)\} + ch^2| \\ &\leq |y(x_i) - y_i| + |h\{f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)\}| + ch^2 \end{aligned}$$

であり、$x=x_i$ における大域離散化誤差を $e_i=y(x_i)-y_i$ とするとき、上式は、

$$|e_{i+1}| \leq |e_i| + h|f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)| + ch^2$$

となり、(1)式のリプシッツ条件、

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq K|y - z|$$

において $x=x_i$、$y= y(x_i)$、$z= y_i$ としたものを用いると、

$$\begin{aligned} |e_{i+1}| &\leq |e_i| + Kh|y(x_i) - y_i| + ch^2 \\ &= |e_i| + Kh|e_i| + ch^2 \\ &= (1 + Kh)|e_i| + ch^2 \end{aligned}$$

となる。

(3)上記の式を繰り返し使うと、$e_0=0$ より、

$$\begin{aligned} |e_i| &\leq (1 + Kh)|e_{i-1}| + ch^2 \leq (1 + Kh)\{(1 + Kh)|e_{i-2}| + ch^2\} + ch^2 \leq \cdots \\ &\leq (1 + Kh)^{i-1}|e_0| + ch^2 \sum_{l=0}^{i-1} (1 + Kh)^l \\ &= ch^2 \sum_{l=0}^{i-1} (1 + Kh)^l = ch^2 \frac{(1 + Kh)^i - 1}{(1 + Kh) - 1} \\ &= \frac{ch}{K}\{(1 + hK)^i - 1\} \end{aligned}$$

となる。

(4)不等式 $1+hx<e^{hx}$、および $ihK<(b-a)K$ より、上式は、

$$|e_i| < \frac{ch}{K}\{e^{ihK}-1\}$$
$$< \frac{ch}{K}\{e^{(b-a)K}-1\}$$
$$\therefore |y(x_i)-y_i| < \frac{c}{K}\{e^{(b-a)K}-1\}h$$

となり、大域離散化誤差が O(h)であることがわかる。

<u>問題 2</u>

(1) オイラー法の大域離散化誤差は $O(h)$であるから，$x = x_i$における真の解を $y(x_i)$，$x_0 = a$ から出発して刻み幅 h のオイラー法で求めた $x = x_i$ での解を y_i^h とすると，

$$y_i^h = y(x_i) + \alpha h + O(h^2) \qquad (2.1)$$

が成り立つ。ここで，αはある定数である。

一方，刻み幅 $2h$ のオイラー法で求めた同じ点での解を（i が偶数だと仮定して）$y_{i/2}^{2h}$ と書くと，同様にして

$$y_{i/2}^{2h} = y(x_i) + 2\alpha h + O(h^2) \qquad (2.2)$$

が成り立つ。ここで，αはある定数である。

(2.1)式を２倍して(2.2)式を引くと，右辺で $O(h)$の項が消えて

$$2y_i^h - y_{i/2}^{2h} = y(x_i) + O(h^2) \qquad (2.3)$$

となる。これがオイラー法に対するリチャードソン加速の式となる。

(2)(a)第 3 回レポートの結果を利用すると、以下の表のようになる。

i	x	y	kaisekikai	gosa
0	0	1	1	0
1	0.333333	0.666667	0.716531	0.049865
2	0.666667	0.444444	0.513417	0.068973
3	1	0.296296	0.367879	0.071583
4	1.333333	0.197531	0.263597	0.066066
5	1.666667	0.131687	0.188876	0.057188
6	2	0.087791	0.135335	0.047544
7	2.333333	0.058528	0.096972	0.038444
8	2.666667	0.039018	0.069483	0.030465
9	3	0.026012	0.049787	0.023775
10	3.333333	0.017342	0.035674	0.018332
11	3.666667	0.011561	0.025562	0.014001
12	4	0.007707	0.018316	0.010608
13	4.333333	0.005138	0.013124	0.007985
14	4.666667	0.003425	0.009404	0.005978
15	5	0.002284	0.006738	0.004454

(b) C による刻み幅 h=1/6 のオイラー法での解法のプログラムは以下のようになる。

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

main()
{
	int i;
	double x,y,kaisekikai,gosa;

	printf("   i              x              y          kaisekikai          gosa¥n");

	y=1.0,x=0.0;
	for(i = 0;i <= 5*6;i++){
		if(i > 0){//i=0 のときは初期値
			x=x+1.0/6.0;
			y=y-y/6.0;
		}

		kaisekikai=exp(-x);
		gosa=y-kaisekikai;
		if(gosa < 0.0){//誤差⇒絶対値
			gosa=-gosa;
		}

		printf("%3d    %13f    %13f    %13f    %13f¥n",i,x,y,kaisekikai,gosa);
	}

	return 0;
}
```

結果は以下の表のようになる。

i	x	y	kaisekikai	gosa
0	0	1	1	0
1	0.166667	0.833333	0.846482	0.013148
2	0.333333	0.694444	0.716531	0.022087
3	0.5	0.578704	0.606531	0.027827
4	0.666667	0.482253	0.513417	0.031164
5	0.833333	0.401878	0.434598	0.032721
6	1	0.334898	0.367879	0.032981
7	1.166667	0.279082	0.311403	0.032322
8	1.333333	0.232568	0.263597	0.031029
9	1.5	0.193807	0.22313	0.029323
10	1.666667	0.161506	0.188876	0.02737
11	1.833333	0.134588	0.15988	0.025292
12	2	0.112157	0.135335	0.023179
13	2.166667	0.093464	0.114559	0.021095
14	2.333333	0.077887	0.096972	0.019085
15	2.5	0.064905	0.082085	0.01718
16	2.666667	0.054088	0.069483	0.015396
17	2.833333	0.045073	0.058816	0.013743
18	3	0.037561	0.049787	0.012226
19	3.166667	0.031301	0.042144	0.010843
20	3.333333	0.026084	0.035674	0.00959
21	3.5	0.021737	0.030197	0.008461
22	3.666667	0.018114	0.025562	0.007448
23	3.833333	0.015095	0.021637	0.006542
24	4	0.012579	0.018316	0.005737
25	4.166667	0.010483	0.015504	0.005021
26	4.333333	0.008735	0.013124	0.004388
27	4.5	0.00728	0.011109	0.003829
28	4.666667	0.006066	0.009404	0.003337
29	4.833333	0.005055	0.00796	0.002905
30	5	0.004213	0.006738	0.002525

(c)(a)、(b)**の結果を利用して、**(1)**で求めた加速を適用した結果は以下の表のようになる。**

x	y(刻み幅1/3)	y(刻み幅1/6)	y(加速適用)	kaisekikai	gosa
0	1	1	1	1	0
0.333333	0.666667	0.694444	0.722221	0.716531	0.00569
0.666667	0.444444	0.482253	0.520062	0.513417	0.006645
1	0.296296	0.334898	0.3735	0.367879	0.005621
1.333333	0.197531	0.232568	0.267605	0.263597	0.004008
1.666667	0.131687	0.161506	0.191325	0.188876	0.002449
2	0.087791	0.112157	0.136523	0.135335	0.001188
2.333333	0.058528	0.077887	0.097246	0.096972	0.000274
2.666667	0.039018	0.054088	0.069158	0.069483	0.000325
3	0.026012	0.037561	0.04911	0.049787	0.000677
3.333333	0.017342	0.026084	0.034826	0.035674	0.000848
3.666667	0.011561	0.018114	0.024667	0.025562	0.000895
4	0.007707	0.012579	0.017451	0.018316	0.000865
4.333333	0.005138	0.008735	0.012332	0.013124	0.000792
4.666667	0.003425	0.006066	0.008707	0.009404	0.000697
5	0.002284	0.004213	0.006142	0.006738	0.000596

加速法の適用により，誤差は h = 1/6 **の場合と比べても** 1/4 **以下に減少する。**

問題 3

(1)**固有値の** 1 **つ**λ**、対応する固有ベクトル v について、**$v_0=0$、$v_M=0$ **とすると、固有値方程式は**

$$
\begin{aligned}
&A\mathbf{v} = l\mathbf{v} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{M-2} \\ v_{M-1} \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{M-2} \\ v_{M-1} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (rv_0)+(1-2r)v_1+rv_2 & = & lv_1 \\ rv_1+(1-2r)v_2+rv_3 & = & lv_2 \\ & \vdots & \\ rv_{j-1}+(1-2r)v_j+rv_{j+1} & = & lv_j \\ & \vdots & \\ rv_{M-2}+(1-2r)v_{M-1}+(rv_M) & = & lv_{M-1} \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

より、v_{j-1}、v_j、v_{j+1} **の満たす** 3 **項間の漸化式は**

$$
rv_{j-1}+(1-2r-l)v_j+rv_{j+1}=0
$$

となる。

(2)$v_j=c_1e^{ij\theta}+c_2e^{-ij\theta}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$**とおくと、上記の漸化式は、**

$$
\begin{aligned}
&r(c_1e^{i(j-1)q}+c_2e^{-i(j-1)q})+(1-2r-l)(c_1e^{ijq}+c_2e^{-ijq})+r(c_1e^{i(j+1)q}+c_2e^{-i(j+1)q})=0 \\
&\Leftrightarrow \{re^{-iq}+(1-2r-l)+re^{iq}\}c_1e^{ijq}+\{re^{iq}+(1-2r-l)+re^{-iq}\}c_2e^{-ijq}=0 \\
&\Leftrightarrow \{2r(\cos q-1)-(l-1)\}(c_1e^{ijq}+c_2e^{-ijq})=0 \\
&\therefore l=2r(\cos q-1)+1 \quad \textbf{または} \quad v_j=c_1e^{ijq}+c_2e^{-ijq}=0
\end{aligned}
$$

であるが、$v_j=c_1e^{ij\theta}+c_2e^{-ij\theta}=0$ **のときは** $c_1=c_2=0$ **となり、題意に適さない。よって、**

$$
l=2r(\cos q-1)+1
$$

となる。このとき v_j **は、境界条件** $v_0=0$、$v_M=0$ **より、**

$$
\begin{aligned}
&c_1+c_2=0 \quad \textbf{かつ} \quad c_1e^{iMq}+c_2e^{-iMq}=0 \\
&\Leftrightarrow e^{iMq}-e^{-iMq}=0 \quad (\because c_1 \neq 0, c_2 \neq 0) \\
&\Leftrightarrow e^{i2Mq}=1 \\
&\therefore q=\frac{np}{M}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、c_1、c_2 **は任意の定数であり、**$\theta=0$、π **のとき、それぞれ** $v_j=c_1+c_2=0$、$v_j=-(c_1+c_2)=0$ **となり、不適なので** $0<\theta<\pi$ **としてよく、上式は、**

$$q = \frac{np}{M} \quad (n = 1,2,\cdots, M-1)$$

となり、これが求めるθの条件である。これより、固有値λ $_n$ **は、**

$$l_n = 2r\left(\cos\frac{np}{M} - 1\right) + 1 \quad (n = 1,2,\cdots, M-1)$$

となる。

(3)**上記で求めた固有値λ** $_n$ **に対する固有ベクトル** $\mathbf{v}_n$ **は、**

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} v_{n_1} \\ v_{n_2} \\ \vdots \\ v_{n_{M-2}} \\ v_{n_{M-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\frac{inp}{M}} + c_2 e^{-\frac{inp}{M}} \\ c_1 e^{2\frac{inp}{M}} + c_2 e^{-2\frac{inp}{M}} \\ \vdots \\ c_1 e^{(M-2)\frac{inp}{M}} + c_2 e^{-(M-2)\frac{inp}{M}} \\ c_1 e^{(M-1)\frac{inp}{M}} + c_2 e^{-(M-1)\frac{inp}{M}} \end{pmatrix} \quad (n = 1,2,\cdots, M-1)$$

さらに，(2)**より** $c_1 = -c_2$ **であることを使い，固有ベクトルには定数倍の不定性があることを利用して係数を簡単化すると，次のようになる。**

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} \sin\frac{np}{M} \\ \sin\frac{2np}{M} \\ \vdots \\ \sin\frac{(M-2)np}{M} \\ \sin\frac{(M-1)np}{M} \end{pmatrix} \quad (n = 1,2,\cdots, M-1)$$

<u>問題</u> <u>4</u>

x_i=ih(i=0,1,⋯,M)、t_j=jk(j=0,1,⋯,M)、$u_{i,j}$=u(x_i,t_j)**とすると、陽的差分法は、**

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{kk}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

$$\Leftrightarrow h\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = k\,\frac{(u_{i+1,j} - u_{i,j}) - (u_{i,j} - u_{i-1,j})}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k}[h\{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)\}] = k\,\frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} - k\,\frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} \quad (\mathrm{i} = 1,2,\cdots,\mathrm{M}-1)$$

と書ける。両辺の i=1 **から** M-1 **までの和をとると、**

$$\sum_{i=1}^{M-1}\frac{1}{k}[h\{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)\}]=\sum_{i=1}^{M-1}\left\{k\,\frac{u(x_{i+1},t_j)-u(x_i,t_j)}{h}-k\,\frac{u(x_i,t_j)-u(x_{i-1},t_j)}{h}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{M-1}[h\{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)\}]=-k\,\frac{u(x_1,t_j)-u(x_0,t_j)}{h}+k\,\frac{u(x_M,t_j)-u(x_{M-1},t_j)}{h}$$

$$\therefore \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{M-1}[h\{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)\}]=k\,\frac{u(x,t_j)-u(x-h,t_j)}{h}\bigg|_{x=b}-k\,\frac{u(x+h,t_j)-u(x,t_j)}{h}\bigg|_{x=a}$$

となり、これは離散的な形の熱量保存則を示している。