応用数学　第二回レポート

089721250　　築山　知弘

問題 1

(1)

$f(x)=0$ の真の解を x とする。

ニュートン法によって得られる n 回目の解を x_n、

真の解からの誤差を e_n とする。$\left(x = x_n - e_n\right)$

$f(x)$ を $x=x$ の周りでテーラー展開すると、

$$f(x)=f(x)+f'(x)(x-x)+\frac{1}{2}f''(x)(x-x)^2+\frac{1}{6}f'''(x)(x-x)^3+\cdots$$

ただし、$f(x)=0$ は、$x=x$ で 3 重解をとるので、$f(x)=f'(x)=f''(x)=0$ となり、

$$f(x)\cong\frac{1}{6}f'''(x)(x-x)^3$$

$$f'(x)\cong\frac{1}{2}f'''(x)(x-x)^2$$

$$\therefore f(x_n)\cong\frac{1}{6}f'''(x)e_n^3$$

$$f'(x_n)\cong\frac{1}{2}f'''(x)e_n^2$$

ニュートン法においては $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ なので、両辺から x を引いて、

$$e_{n+1}=e_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$=e_n-\frac{\frac{1}{6}f'''(x)e_n^3}{\frac{1}{2}f'''(x)e_n^2}=\frac{2}{3}e_n$$

故に、収束率 2/3 の 1 次収束となる。

(2)

同様にして、m重根の場合においては、

$$f(x_n)\cong\frac{1}{m!}f^{(m)}(x)e_n^m$$

$$f'(x_n)\cong\frac{1}{(m-1)!}f^{(m)}(x)e_n^{m-1}$$

$$e_{n+1}=e_n-\frac{1}{m}e_n=\frac{m-1}{m}e_n$$

収束率は、(m-1)/m の 1 次収束になる。

問題 2

ラグランジュ補間の絶対誤差は $|e_n(x)| \le \dfrac{(x_n - x_0)^{(n+1)}}{(x+1)!} \max\limits_{x_0 \le x \le x_n} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$ **で表される。**

(1)

$$\max_{0 \le x \le 2p} \left| (\sin x)^{(n+1)} \right| = \begin{cases} \max\limits_{0 \le x \le 2p} |(\sin x)| = 1 & n = odd \\ \max\limits_{0 \le x \le 2p} |(\cos x)| = 1 & n = even \end{cases}$$

$$\therefore \max |e_n| = \frac{(2p)^{n+1}}{(n+1)!}$$

(2)

$$\max_{0 \le x \le 1} \left| (\exp x)^{(n+1)} \right| = \max_{0 \le x \le 1} |(\exp x)| = e$$

$$\therefore \max |e_n| = \frac{e}{(n+1)!}$$

(3)

$\log_{10} \max |e_n| \le -3$ **を満たすような n であれば、条件を満たす。**

i)

$(n+1)\log_{10} 2p - \log_{10}\{(n+1)!\} \le -3$

$n \ge 21$

ii)

$\log_{10} e - \log_{10}\{(n+1)!\} \le -3$

$n \ge 6$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
(1)	1.3	1.6	1.8	1.9	1.9	1.9	1.8	1.6	1.4	1.2	0.9
(2)	0.1	-0.3	-0.9	-1.6	-2.4	-3.3	-4.2	-5.1	-6.1	-7.2	-8.2

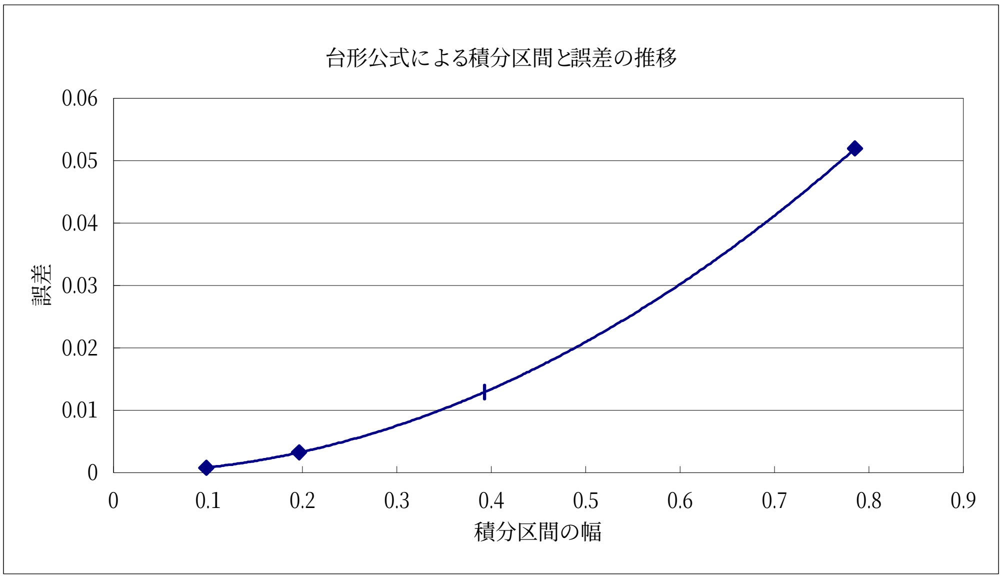
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
(1)	0.6	0.2	-0.1	-0.5	-1.0	-1.4	-1.9	-2.4	-2.9	-3.5	-4.1
(2)	-9.4	-10.5	-11.7	-12.9	-14.1	-15.4	-16.7	-18.0	-19.3	-20.6	-22.0

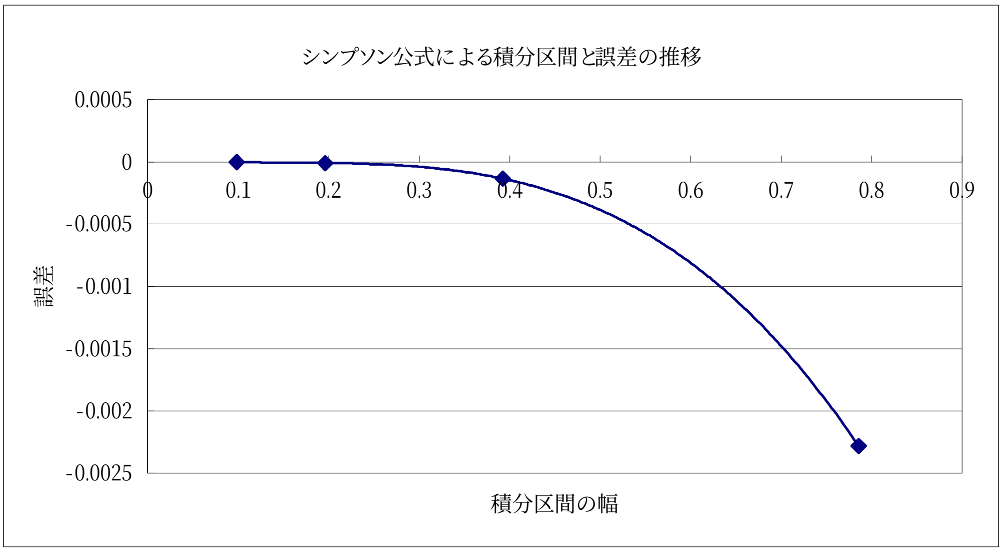
問題 3

Excel マクロを利用した。

始点	終点	式	真の値
0	1.570796327	sin(x)	1

区間の数 n	区間の幅 h	台形公式	真の値との差	シンプソン公式	真の値との差
2	0.785398163	0.948059449	0.051940551	1.002279877	-0.002279877
4	0.392699082	0.987115801	0.012884199	1.000134585	-0.000134585
8	0.196349541	0.996785172	0.003214828	1.000008296	-8.29552E-06
16	0.09817477	0.99919668	0.00080332	1.000000517	-5.16685E-07





明らかにシンプソン公式の方が誤差が小さく、収束も早い。

以下は使用したマクロのソース。

```
'**************************************
'***            台形公式           ***
'**************************************
Private Sub CommandButton1_Click()

    Dim Row As Integer                          '作業中の行
    Dim T As Integer                            '繰り返しカウンタ
    Dim N_Range As Integer                      '積分区間数
    Dim X As Double                             'x
    Dim A0 As Double                            '積分範囲始点
    Dim An As Double                            '積分範囲終点
    Dim Hi As Double                            '積分区間幅員
    Dim Integrate As Double                     '積分値

    A0 = Val(Range("a7").Value)                 '積分範囲始点取得
    An = Val(Range("b7").Value)                 '積分範囲終点取得

    For Row = 10 To 128
        N_Range = Range("a" & Row).Value        '積分区間数取得
        If N_Range = 0 Then Exit For            '空欄だったら終了

        Hi = (An - A0) / CDbl(N_Range)
        Integrate = (Sin(A0) + Sin(An)) / 2

        For t = 1 To N_Range - 1
            x = A0 + Hi * t
            Integrate = Integrate + Sin(x)
        Next t

        Integrate = Integrate * Hi
        Range("c" & Row).Value = Integrate      'シートに記入
    Next Row
End Sub
```

```
'*************************************
'***         シンプソン公式         ***
'*************************************
Private Sub CommandButton2_Click()

    Dim Row As Integer                          '作業中の行
    Dim T As Integer                            '繰り返しカウンタ
    Dim N_Range As Integer                      '積分区間数
    Dim X As Double                             'x
    Dim A0 As Double                            '積分範囲始点
    Dim An As Double                            '積分範囲終点
    Dim Hi As Double                            '積分区間幅員
    Dim Integrate As Double                     '積分値

    A0 = Val(Range("a7").Value)                 '積分範囲始点取得
    An = Val(Range("b7").Value)                 '積分範囲終点取得

    For Row = 10 To 128
        N_Range = Range("a" & Row).Value        '積分区間数取得
        If N_Range = 0 Then Exit For            '空欄だったら終了

        Hi = (An - A0) / CDbl(N_Range)
        Integrate = (Sin(A0) + Sin(An)) / 3
        For t = 2 To N_Range - 2 Step 2
            x = A0 + Hi * t
            Integrate = Integrate + Sin(x) * 2 / 3
        Next t
        For t = 1 To N_Range - 1 Step 2
            x = A0 + Hi * t
            Integrate = Integrate + Sin(x) * 4 / 3
        Next t

        Integrate = Integrate * Hi
        Range("e" & Row).Value = Integrate      'シートに記入
    Next Row
End Sub
```

問題 4

(1)

ニュートン法において、$f(x)$ に対し $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ の n+1 点が与えられた時、補助関数 $z_j \quad (j = 0,1,2,\ldots, n-1)$ を

$z_j = a_j + a_{j+1}(x - x_j) + a_{j+2}(x - x_j)(x - x_{j+1}) + \cdots + a_n(x - x_j)\cdots(x - x_{n-1})$ とすると、

$$z_0 = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + a_n(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) = f(x)$$
$$z_{n-1} = a_{n-1} + a_n(x - x_{n-1})$$
$$z_n = a_n$$
$$\therefore z_{j-1} = a_{j-1} + z_j(x - x_{j-1})$$
$$z_j = {(z_{j-1} - a_{j-1})}\big/{(x - x_{j-1})}$$

となる。最後の漸化式を繰り返してゆくと、

$$a_j = z_j = \left[\left\{\left(y_j - a_0\right)\big/\left(x_j - x_0\right) - a_1\right\}\big/\left(x_j - x_1\right) - a_2\right]\big/\cdots\left(x_j - x_{j-1}\right)$$ となり、

O(j)の計算量で a_j を求める事ができる。

同様にして、任意の x における $f(x)$ は、

$f(x) = [\{a_n(x - x_{n-1}) + a_{n-1}\}(x - x_{n-2}) + a_{n-2}](x - x_{n-3})\cdots + a_0$ として求まる。

プログラムソースは以下のようになる。

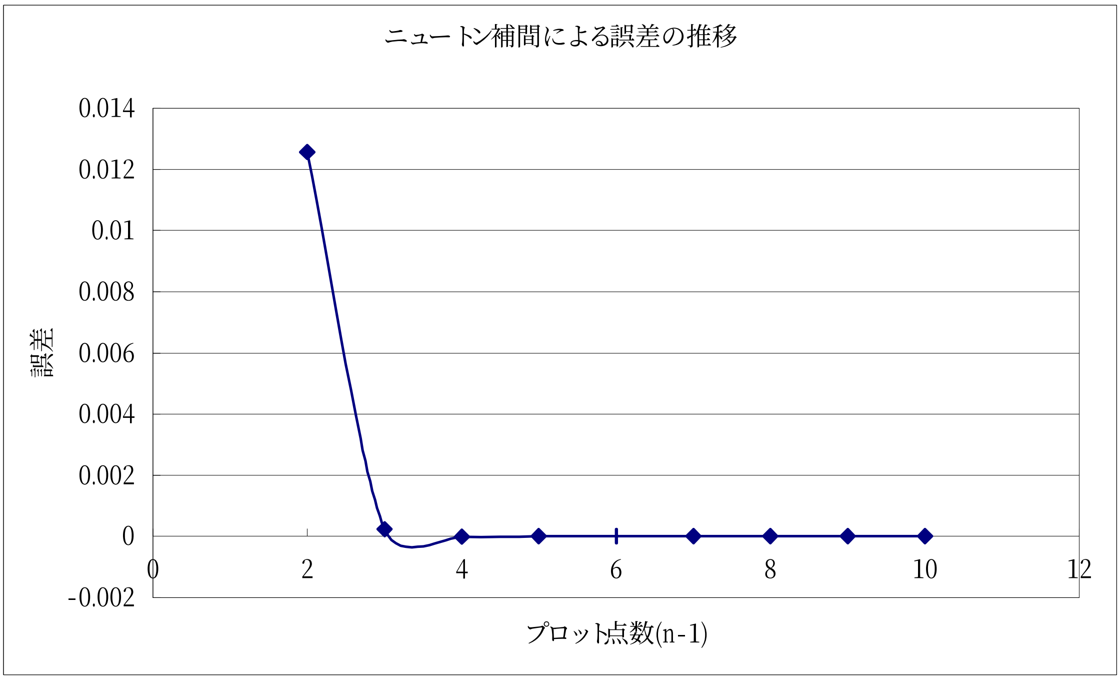
```
Private Sub CommandButton1_Click()

    '変数宣言
    Dim J1 As Integer      '繰り返しカウンタ1
    Dim J2 As Integer      '繰り返しカウンタ2
    Dim N As Integer       '変数用カウンタ
    Dim X() As Double      'Xn 格納
    Dim Y() As Double      'Yn 格納
    Dim A() As Double      'An 格納
    Dim Z As Double        '補助変数

    Input(N,X(0)…X(n),Y(0)…Y(n),X(n+1))                'X(n+1)は近似を求める任意の x の値
```

```
'Anを計算　全部でO(N^2)の計算量となる
A(0) = Y(0)
For J1 = 1 To N
    Z = Y(J1)                              '↑ここでA(J1)を計算
    For J2 = 0 To J1 - 1                   '｜この間の計算量はO(J1)ですんでいる
        Z = (Z - A(J2)) / (X(J1) - X(J2))  '｜最初からA(J1)を使えば補助変数Zは不要だが
    Next J2                                '｜問題文にあわせるため使用してある
    A(J1) = Z                              '↓
Next J1

'f(x)を計算　O(N)の計算量
Z = A(N)
For J1 = N - 1 To 0 Step -1
    Z = Z * (X(N + 1) - X(J1)) + A(J1)
Next J1
Y(N + 1) = Z

Output(Y(N+1))

End Sub
```

(2)

前問のソースを手直しして使用した。

n	y	誤差
2	2.0406914	0.01257641
3	2.0283413	0.00022634
4	2.0281029	-1.205E-05
5	2.0281142	-7.619E-07
6	2.028115	-1.493E-08
7	2.028115	8.4289E-11
8	2.028115	1.0442E-11
9	2.028115	2.1494E-13
10	2.028115	0


ニュートン補間による誤差の推移
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
-0.002
誤差
0
2
4
6
8
10
12
プロット点数(n-1)