2004 年度　応用数学　第１回レポート 解答

問題 1

(1) $|x| \ll 1$ のとき $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \simeq 1$ だから桁落ちが生じる。桁落ちを防ぐには，通分して分子の有理化を行い，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 &= \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{(\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})} \\
&= \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}+1-x^2}
\end{aligned}$$

と変形して計算すればよい。

(2) $x > 0$ のとき $\log(1+x) > 0$，$\log(1-x) < 0$ となり，2 つの項は異符号だから引き算を行っても桁落ちは生じない。$x < 0$ のときも同様。$x = 0$ のときは両方の項が 0 になるから，やはり桁落ちの問題は生じない。

(3) $|x| \ll 1$ のとき $\sqrt{\cos x} \simeq 1$ だから桁落ちが生じる。桁落ちを防ぐには，

$$\begin{aligned}
1-\sqrt{\cos x} &= \frac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{1+\sqrt{\cos x}} \\
&= \frac{1-\cos x}{1+\sqrt{\cos x}} \\
&= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)} \\
&= \frac{\sin^2 x}{(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)}
\end{aligned}$$

と変形して計算すればよい（分子が $1-\cos x$ のままでは桁落ちが生じることに注意）。

問題 2

(1) $f(x) = x^3 - a$ としてニュートン法の公式を適用すると，反復式は次のようになる。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x^3-a}{3x^2} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$$

(2) $a = 53$ とし，初期値 $x_0 = 4$ から始めて反復を行うと表 1 の結果が得られる。真の値は $\sqrt[3]{53} = 3.756285754$ であり，表中にはこの値との誤差も示してある。表より，誤差は n につれて急速に減少し，4 回の反復で小数点以下 9 桁まで正しい値が得られることがわかる。

(3) 初期区間を $[a_0, b_0] = [3, 4]$ として二分法を実行すると，表 2 のようになる。10 回反復後の近似値は 3.756835938 であるが，真の値と比べると小数点以下 3 桁までしか正しい値が得られておらず，ニュートン法に比べて収束がかなり遅いことが確認できる。

表 1: ニュートン法による $\sqrt[3]{53}$ の計算

n	x_n	誤差
0	4	0.243714246
1	3.770833333	0.014547579
2	3.756341805	0.000056051
3	3.756285755	0.000000001
4	3.756285754	0.000000000
5	3.756285754	0.000000000

表 2: 二分法による $\sqrt[3]{53}$ の計算

n	a_n	b_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$
0	3	4	-26.000000000	11.000000000	-10.125000000
1	3.5	4	-10.125000000	11.000000000	-0.265625000
2	3.75	4	-0.265625000	11.000000000	5.185546875
3	3.75	3.875	-0.265625000	5.185546875	2.415283203
4	3.75	3.8125	-0.265625000	2.415283203	1.063751221
5	3.75	3.78125	-0.265625000	1.063751221	0.396305084
6	3.75	3.765625	-0.265625000	0.396305084	0.064651966
7	3.75	3.7578125	-0.265625000	0.064651966	-0.100658357
8	3.75390625	3.7578125	-0.100658357	0.064651966	-0.018046178
9	3.755859375	3.7578125	-0.018046178	0.064651966	0.023292146
10	3.755859375	<u>3.756835938</u>	-0.018046178	0.023292146	0.002620297

問題 3

(1)　(i)

$$f_0(x) = y_0 = 1$$

(ii)

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_0(x) + \frac{y_1 - f_0(x_1)}{x_1 - x_0} \\ &= 1 + \frac{e-1}{1-0}(x-0) \\ &= 1 + (e-1)x \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1(x) + \frac{y_2 - f_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}(x - x_0)(x - x_1) \\ &= 1 + (e-1)x + \frac{\sqrt{e} - 1 - (e-1)\cdot 0.5}{(0.5-0)(0.5-1)}(x-0)(x-1) \\ &= 1 + (e-1)x + (2 + 2e - 4\sqrt{e})x(x-1) \end{aligned}$$

(2) 上記で求めた $f_2(x)$ に $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を代入すると，

$$\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq f_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 2.0407$$

(3) 区間 $[x_0, x_n]$ において $n+1$ 個の点でラグランジュ補間を行った場合の絶対誤差は，任意の $x_{n+1} \in [x_0, x_n]$ に対して

$$|f(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1})| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq \xi \leq x_n} |f^{(n+1)}(\xi)|\, |x_n - x_0|^{n+1}$$

と評価される。いま，$f(x) = e^x$ の $n+1$ 階微分は e^x であり，区間は $[0,1]$，$n=2$ であることから，$\max_{x_0 \leq \xi \leq x_n} |f^{(n+1)}(\xi)| = e$ となる。また，$|x_n - x_0|^{n+1} = 1$ となる。これらを上式に代入すると，

$$|f(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1})| \leq \frac{1}{3!} e \simeq 0.45305$$

となる。一方，真の値は $\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2.0281\cdots$ であるから，実際の誤差は

$$|2.0281 - 2.0407| = 0.0126 \leq 0.45305$$

となる。以上より，実際の誤差が理論的な誤差の上限より小さくなっていることが確かめられた。