2004 年度　応用数学　第２回レポート 解答

問題 1

森大介君の解答を参照のこと。

問題 2

(1) a_n と a_{n+1} に関する式

$$
\begin{aligned}
a_n &= b_0 + b_1\lambda_1^n + b_2\lambda_2^n + b_3\lambda_3^n + \cdots \\
a_{n+1} &= b_0 + b_1\lambda_1^{n+1} + b_2\lambda_2^{n+1} + b_3\lambda_3^{n+1} + \cdots
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
c_n &\equiv a_{n+1} - \lambda a_n \\
&= (1-\lambda_1)b_0 + (\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2^n b_2 + (\lambda_3-\lambda_1)\lambda_3^n b_3 + \cdots \qquad (1)
\end{aligned}
$$

となる。$1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \cdots$ であり，c_n では λ_1^n の項が消えているため，c_n は a_n よりも速く b_0 に収束する。

(2) 与えられた式を，以下のように変形する。

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n} &= \frac{(\lambda_1-1)\lambda_1^{n+1}b_1 + (\lambda_2-1)\lambda_2^{n+1}b_2 + +(\lambda_3-1)\lambda_3^{n+1}b_3 + \cdots}{(\lambda_1-1)\lambda_1^{n}b_1 + (\lambda_2-1)\lambda_2^{n}b_2 + +(\lambda_3-1)\lambda_3^{n}b_3 + \cdots} \\
&= \frac{\lambda_1 + \frac{\lambda_2-1}{\lambda_1-1}\cdot\lambda_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\frac{b_2}{b_1} + \frac{\lambda_3-1}{\lambda_1-1}\cdot\lambda_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^n\frac{b_3}{b_1} + \cdots}{1 + \frac{\lambda_2-1}{\lambda_1-1}\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\frac{b_2}{b_1} + \frac{\lambda_3-1}{\lambda_1-1}\cdot\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^n\frac{b_3}{b_1} + \cdots} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

ここで，$n \to \infty$ のとき $\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^n \to 0$（$k \geq 2$）だから，$n \to \infty$ のとき分子・分母の第２項以降は消える。したがって，

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n} = \lambda_1 \qquad (3)
$$

が成り立つ。

(3) 小問 (2) より，n が大きいとき λ_1 は $\lambda_1 \simeq \frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$ と近似できる。これを c_n の定義式に代入して得られる数列を d_n とすると，

$$
\begin{aligned}
d_n &\equiv \frac{a_{n+1} - \frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}\cdot a_n}{1 - \frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}} \\
&= \frac{a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2}{a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

となる。

問題 3

(1) 変数変換 $x = \tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right)$ を行うと，積分区間 $-1 \leq x \leq 1$ は $-\infty \leq t \leq \infty$ に変換される。また，

$$dx = \frac{\frac{\pi}{2}\cosh t}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right)}\,dt \tag{5}$$

となる。これより，与えられた積分は

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt[4]{1-x}}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{1+\tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{1-\tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right)\right\}^{-\frac{1}{4}} \times \frac{\frac{\pi}{2}\cosh t}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right)}\,dt \end{aligned} \tag{6}$$

となる。

(2) 公式 $\frac{1}{\cosh^2 u} = 1 - \tanh^2 u = (1+\tanh u)(1-\tanh u)$ より，

$$\cosh^2\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right) = \left\{1+\tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right)\right\}\left\{1-\tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right)\right\} \tag{7}$$

となる。これを積分 (6) に代入すると，

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{1+\tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{1-\tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right)\right\}^{\frac{3}{4}} \times \frac{\pi}{2}\cosh t\,dt \tag{8}$$

被積分関数は $t \to \pm\infty$ のとき 0 に近づき，特異性を持たない。

(3) 二重指数型数値積分公式に基づいて積分値を計算する C プログラムの例を以下に示す。

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

main()
{
   double t, t1=-4.0, t2=4.0, h, I, pi;
   double expt, expmt, sinht, cosht;
   double expsinht, expmsinht, tanhsinht;
   double sqrt1, sqrt2;
   int n, i;

   pi=3.1415926535897932;
   for (n=8; n<=256; n=n*2)
   {
      h=(t2-t1)/n;
      I=0.0;
      for (i=0; i<=n; i++)
```

```
        {
          t=t1+i*h;
          expt = exp(t);
          expmt = exp(-t);
          sinht = (expt-expmt)*0.5;
          cosht = (expt+expmt)*0.5;
          expsinht = exp(pi*0.5*sinht);
          expmsinht = exp(-pi*0.5*sinht);
          tanhsinht = (expsinht-expmsinht)/(expsinht+expmsinht);

          sqrt1 = sqrt(1.0+tanhsinht);
          sqrt2 = sqrt(sqrt(1.0-tanhsinht));

          I += pi*0.5*sqrt1*sqrt2*sqrt2*sqrt2*cosht*h;
        }
        printf("n=%d, I=%14.10lf\n", n, I);
      }
      return 0;
    }
```

また，このプログラムの実行結果を次に示す。

```
n=8,    I=  2.8538674587
n=16,   I=  2.8496740442
n=32,   I=  2.8496737625
n=64,   I=  2.8496737660
n=128,  I=  2.8496737569
n=256,  I=  2.8496737680
```

n=256 のとき，小数点以下 7 桁程度までが収束していることがわかる。

問題 4

(1) $f(x)$ のフーリエ級数展開 $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ に対して項別積分を行うと，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx \\ &= \sum_{k\neq 0} c_k \left[\frac{1}{ik} e^{ikx}\right]_0^{2\pi} + c_0 \left[x\right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi c_0 \end{aligned} \qquad (9)$$

が得られる。

(2) $f(x)$ のフーリエ級数展開に対して n 分割の台形公式を適用する。$f(0)=f(2\pi)$ であるから，$f(0)$ の重みを $\frac{1}{2}$ から 1 に変え，代わりに $f(2\pi)$ の重みを $\frac{1}{2}$ から 0 に変えてもよいことに注意すると，台形公式による積分値は次のように書ける。

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2\pi}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n}j\right) \\ &= \frac{2\pi}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left\{ik\cdot\frac{2\pi}{n}j\right\} \\ &= \frac{2\pi}{n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \sum_{j=0}^{n-1}\exp\left\{ik\cdot\frac{2\pi}{n}j\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

ここで，等比級数の公式より，$\sum_{j=0}^{n-1}\exp\left\{ik\cdot\frac{2\pi}{n}j\right\}$ は $k=nl$（l は整数）のとき n，それ以外のとき 0 となることに注意すると，

$$I_n = 2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{nl} \tag{11}$$

となる。これと式 (9) より，次式を得る。

$$I_n - I = 2\pi\sum_{l=1}^{\infty}(c_{nl}+c_{-nl}) \tag{12}$$

(3) 定理より，ある定数 $D(m)$ に対し，$|c_k| \le D(m)\,|k|^{-m}$ と書ける。これと小問 (2) の結果より，

$$\begin{aligned} |I_n - I| &\le 2\pi\sum_{l=1}^{\infty}(|c_{nl}|+|c_{-nl}|) \\ &\le 4\pi D(m)\sum_{l=1}^{\infty}(nl)^{-m} \\ &= 4\pi D(m)n^{-m}\sum_{l=1}^{\infty} l^{-m} \\ &= 4\pi D(m)E(m)\,n^{-m} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^m}D(m)E(m)\,h^m \end{aligned} \tag{13}$$

となる。ここで，$m \ge 2$ と仮定し，その場合に $\sum_{l=1}^{\infty} l^{-m}$ が有限の値に収束することより，その値を $E(m)$ とおいた（いま考えている $f(x)$ は解析関数であり，当然 C^2 級関数でもあるから，$m \ge 2$ と仮定しても構わない）。

式 (13) より，$f(x)$ が C^m 級関数（$m \ge 2$）ならば，台形公式の誤差 $|I_n - I|$ は少なくとも h^m のオーダーで減少することがわかる。$f(x)$ が解析関数の場合は，どんな正の整数 m に対しても $f(x)$ は C^m 級関数であるから，式 (13) はどんな正の整数 $m \ge 2$ に対しても成り立つ。これは，台形公式の誤差が h のどんなべき乗よりも速く減衰することを意味する。