2004 年度　応用数学　第３回レポート 解答

問題 1

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ -23 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_1 = 3 \quad (\text{後退代入により})$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 33 \\ 45 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -27 \\ -45 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -45 \\ -27 \end{pmatrix} \quad (\text{ピボット選択})$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_1 = 1 \quad (\text{後退代入により})$$

問題 2

(1) 与えられた式

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \kappa \left\{ c \, \frac{u_{i+1,j} - 2\,u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + (1-c) \, \frac{u_{i+1,j+1} - 2\,u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \right\} \tag{1}$$

において，$r = \frac{k\kappa}{h^2}$ とおき，時刻 t_{j+1} での項を左辺，時刻 t_j での項を右辺に持ってきて整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} &-(1-c) r u_{i+1,j+1} + \{1 + 2(1-c)r\} u_{i,j+1} - (1-c) r u_{i-1,j+1} \\ &= c r u_{i,j} + (1 - 2cr) u_{i,j} + c r u_{i-1,j} \end{aligned} \tag{2}$$

これを行列形式で書くと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1+2(1-c)r & -(1-c)r & & & \\ -(1-c)r & 1+2(1-c)r & -(1-c)r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -(1-c)r & 1+2(1-c)r & -(1-c)r \\ & & & -(1-c)r & 1+2(1-c)r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{M-2,j+1} \\ u_{M-1,j+1} \end{pmatrix}$$

$$-(1-c)r \begin{pmatrix} u_{0,j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{M,j+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2cr & cr & & & \\ -cr & 1-2cr & cr & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & cr & 1-2cr & cr \\ & & & cr & 1-2cr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{M-2,j} \\ u_{M-1,j} \end{pmatrix} + cr \begin{pmatrix} u_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{M,j} \end{pmatrix} \tag{3}$$

(2) 陽的差分法の項で導入した行列 A を使うと，式 (3) の左辺の行列は $-(1-c)A+(2-c)I$ と書ける。また，右辺の行列は $cA+(1-c)I$ と書ける。したがって，式 (3) は次のように書き直せる。

$$\{-(1-c)A+(2-c)I\}\mathbf{u}_{j+1} - (1-c)\mathbf{b}_{j+1} = \{cA+(1-c)I\}\mathbf{u}_j + c\mathbf{b}_j \tag{4}$$

(3) 式 (4) を $\mathbf{u}_{j+1}$ について解くと次のようになる。

$$\mathbf{u}_{j+1} = \{-(1-c)A+(2-c)I\}^{-1}\{cA+(1-c)I\}\mathbf{u}_j + \{-(1-c)A+(2-c)I\}^{-1}\{(1-c)\mathbf{b}_{j+1}+c\mathbf{b}_j\} \tag{5}$$

よって

$$C = \{-(1-c)A+(2-c)I\}^{-1}\{cA+(1-c)I\} \tag{6}$$

となる。したがって，C の固有値を ν_l（$l=1,2,\ldots,M-1$）とすると，ν_l は A の固有値 λ_l の式を用いて次のように求められる。

$$\begin{aligned} \nu_l &= \frac{c\lambda_l + (1-c)}{-(1-c)\lambda_l + (2-c)} \\ &= \frac{c\left\{1-4r\sin^2\frac{l\pi}{2M}\right\} + (1-c)}{-(1-c)\left\{1-4r\sin^2\frac{l\pi}{2M}\right\} + (2-c)} \\ &= \frac{1-4cr\sin^2\frac{l\pi}{2M}}{1+(1-c)4r\sin^2\frac{l\pi}{2M}} \end{aligned} \tag{7}$$

(4) ν_l の式は次のように変形できる。

$$\nu_l = \frac{1+(1-c)4r\sin^2\frac{l\pi}{2M} - 4r\sin^2 l\pi 2M}{1+(1-c)4r\sin^2\frac{l\pi}{2M}} = 1 - \frac{4r\sin^2\frac{l\pi}{2M}}{1+(1-c)4r\sin^2\frac{l\pi}{2M}} \tag{8}$$

$r > 0$ かつ $0 \le c \le \frac{1}{2}$ のとき，右辺の第 2 項は c についての減少関数だから，(l を固定して考えた場合に）$c = 0$ のとき最大値，$c = \frac{1}{2}$ のとき最小値を取る。

そこで，元の式 (8) に $c = 0$ を代入すると，

$$\nu_l = \frac{1}{1 + 4r\sin^2\frac{l\pi}{2M}} \tag{9}$$

で，これは明らかに 0 以上 1 以下である。一方，元の式に $c = \frac{1}{2}$ を代入すると，

$$\nu_l = \frac{1 - 2r\sin^2\frac{l\pi}{2M}}{1 + 2r\sin^2\frac{l\pi}{2M}} \tag{10}$$

となり，分母の絶対値が分子の絶対値より大きいから，これの絶対値は 1 以下，すなわち値は -1 から 1 の間にある。

以上より，$0 \le c \le \frac{1}{2}$ を満たす任意の c に対し，ν_l は $[-1, 1]$ の範囲に含まれる。したがって，すべての l に対して $|\nu_l| \le 1$ が成り立つから，この解法は無条件安定である。

問題 3

石川達也君のレポートを参照。