2005 年度　応用数学　第 2 回レポート課題

工学部物理工学科応用物理学コース 3 年　080321321　長澤　嘉明

問題 1

(1) $y = y_1$、$y' = y_2$ とおくと、求める 1 階連立常微分方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 \end{cases} \qquad \text{初期条件} \quad y_1(0) = 1、y_2(0) = 0$$

次に、オイラー法を適用したときの反復式は次のようになる。

$$\begin{cases} y_{1,i+1} = y_{1,i} + hy_{2,i} \\ y_{2,i+1} = y_{2,i} - hy_{1,i} \end{cases}$$

ステップ幅を $h = 0.1$ として第 10 ステップまでの近似解を求めると次のようになった。

$$\begin{aligned}
y_{1,1} &= y_{1,0} + hy_{2,0} = 1 & y_{2,1} &= y_{2,0} - hy_{1,0} = -0.1 \\
y_{1,2} &= y_{1,1} + hy_{2,1} = 0.99 & y_{2,2} &= y_{2,1} - hy_{1,1} = -0.2 \\
y_{1,3} &= y_{1,2} + hy_{2,2} = 0.97 & y_{2,3} &= y_{2,2} - hy_{1,2} = -0.299 \\
y_{1,4} &= y_{1,3} + hy_{2,3} = 0.9401 & y_{2,4} &= y_{2,3} - hy_{1,3} = -0.396 \\
y_{1,5} &= y_{1,4} + hy_{2,4} = 0.9005 & y_{2,5} &= y_{2,4} - hy_{1,4} = -0.49001 \\
y_{1,6} &= y_{1,5} + hy_{2,5} = 0.851499 & y_{2,6} &= y_{2,5} - hy_{1,5} = -0.58006 \\
y_{1,7} &= y_{1,6} + hy_{2,6} = 0.793493 & y_{2,7} &= y_{2,6} - hy_{1,6} = -0.6652099 \\
y_{1,8} &= y_{1,7} + hy_{2,7} = 0.72697201 & y_{2,8} &= y_{2,7} - hy_{1,7} = -0.7445592 \\
y_{1,9} &= y_{1,8} + hy_{2,8} = 0.65251609 & y_{2,9} &= y_{2,8} - hy_{1,8} = -0.817256401 \\
y_{1,10} &= y_{1,9} + hy_{2,9} = 0.5707904499 & y_{2,10} &= y_{2,9} - hy_{1,9} = -0.88250801
\end{aligned}$$

(2) 求める 1 階連立常微分方程式は (1) の答えと同じである。これにホイン法を適用したときの反復式は次のようになる。

$$\begin{cases} \tilde{y}_{1,i+1} = y_{1,i} + hy_{2,i} \\ \tilde{y}_{2,i+1} = y_{2,i} - hy_{1,i} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{1,i+1} = y_{1,i} + \dfrac{h}{2}(y_{2,i} + \tilde{y}_{2,i+1}) \\ y_{2,i+1} = y_{2,i} - \dfrac{h}{2}(y_{1,i} + \tilde{y}_{1,i+1}) \end{cases}$$

ステップ幅を $h = 0.1$ として第 10 ステップまでの近似解を求めると次のようになった。

$$\begin{aligned}
y_{1,1} &= 0.995 & y_{2,1} &= -0.1 \\
y_{1,2} &= 0.98025 & y_{2,2} &= -0.199 \\
y_{1,3} &= 0.955224875 & y_{2,3} &= -0.2960075 \\
y_{1,4} &= 0.9208480006 & y_{2,4} &= -0.39004995 \\
y_{1,5} &= 0.8772387656 & y_{2,5} &= -0.4801845003 \\
y_{1,6} &= 0.8248341218 & y_{2,6} &= -0.5655074544 \\
y_{1,7} &= 0.7641592057 & y_{2,7} &= -0.6451633293 \\
y_{1,8} &= 0.6958220768 & y_{2,8} &= -0.7183534332 \\
y_{1,9} &= 0.6205076231 & y_{2,9} &= -0.7843438737 \\
y_{1,10} &= 0.5389706976 & y_{2,10} &= -0.8424729166
\end{aligned}$$

(3) 式 (1) の解を求める。$y = A\exp(\lambda x)$ とおくと、特性方程式は、

$$\lambda^2 = -1$$
$$\therefore\ \lambda = \pm i$$
$$\therefore\ y = A\cos x + B\sin x$$

ここで、初期条件より、$A = 1$、$B = 0$ であるから、求める解は $y = \cos x$ である。
解析解とオイラー法、ホイン法の結果をまとめて表にした。

x	$\cos x$	オイラー法	ホイン法
0	1	1	1
0.1	0.995004	1	0.995
0.2	0.980067	0.99	0.98025
0.3	0.955336	0.97	0.955225
0.4	0.921061	0.9401	0.920848
0.5	0.877583	0.9005	0.877239
0.6	0.825336	0.851499	0.824834
0.7	0.764842	0.793493	0.764159
0.8	0.696707	0.726972	0.695822
0.9	0.621610	0.652516	0.620508
1	0.540302	0.570790	0.538971

表よりホイン法の方が解析解に近いことがわかる。よって、ホイン法の方が精度が良い。

問題 2

(1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\frac{\partial u}{\partial x} - f(x)$$

(2)

$$\frac{u(t_i+k, x_j) - u(t_i, x_j)}{k} = \frac{u(t_i, x_j+h) - 2u(t_i, x_j) + u(t_i, x_j-h)}{h^2} + c\frac{u(t_i, x_j+h) - u(t_i, x_j-h)}{2h} - f_{i,j}$$

$$\therefore\ \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + c\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} - f_{i,j}$$

(3)

$$u_{i+1,j} - u_{i,j} = \frac{k}{h^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + \frac{ck}{2h}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) - kf_{i,j}$$

$$\therefore\ u_{i+1,j} = \frac{k}{h}\left(\frac{1}{h} + \frac{c}{2}\right)u_{i,j+1} + \left(1 - \frac{2k}{h^2}\right)u_{i,j} + \frac{k}{h}\left(\frac{1}{h} - \frac{c}{2}\right)u_{i,j-1} - kf_{i,j}$$

(4) $u_{i+1,j}$ を計算するときには $u_{i+1,j-1}$ が既に計算済みであるので、(3) の結果の式の $u_{i+1,j}$ を $u_{i+1,j-1}$ に置き換えればよい。

$$\therefore\ u_{i+1,j} = \frac{k}{h}\left(\frac{1}{h} + \frac{c}{2}\right)u_{i,j+1} + \left(1 - \frac{2k}{h^2}\right)u_{i,j} + \frac{k}{h}\left(\frac{1}{h} - \frac{c}{2}\right)u_{i+1,j-1} - kf_{i,j}$$

問題 3

(1)
```
# include <stdio.h>
# include <stdlib.h>

#define SIZE 10

int main(void)
{
    int e, i, j, k, n;
    float t, a[SIZE][SIZE], b[SIZE], x[SIZE];

    printf("連立一次方程式 Ax=b の解を求めます。\n");
    printf("連立一次方程式の変数の数を入力してください。\n");
    scanf("%d", &n);

    printf("\n%d × %d の係数行列 A の各要素を入力してください。(行方向に入力)\n", n, n);
    for (i = 0; i < n; i++) {
        for (j = 0; j < n; j++) {
            scanf("%d", &e);
            a[i][j] = e;
        }
    }

    printf("\n%d × 1 の右辺ベクトル b の各要素を入力してください。\n", n);
    for (i = 0; i < n; i++) {
        scanf("%d", &e);
        b[i] = e;
    }


        /* 上三角型行列への変換 */
    for (i = 0; i < n-1; i++) {
        for (j = i+1; j < n; j++) {
            t = a[j][i];
            for (k = i; k < n; k++) {
                a[j][k] -= a[i][k] * t / a[i][i];
            }
            b[j] -= b[i] * t / a[i][i];
        }
    }


        /* 解の後退代入 */
    x[n-1] = b[n-1] / a[n-1][n-1];
    for (i = n-2; i >= 0 ; i--) {
        t = 0;
        for (j = n-1; j > i; j--) {
            t += a[i][j] * x[j];
        }
        x[i] = (b[i] - t) / a[i][i];
    }


    printf("\n 求める連立一次方程式 Ax=b の解は\n");
    for (i = 0; i < n; i++) {
        printf("x[%d] = %f\n", i+1, x[i]);
    }

    getchar();
    getchar();
    return 0;
}
```

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 42 \\ 114 \\ 102 \end{pmatrix}$$

とする。計算すると次の画面のとおりになった。

```
連立一次方程式 Ax=b の解を求めます。
連立一次方程式の変数の数を入力してください。
3

3×3の係数行列Aの各要素を入力してください。(行方向に入力)
1
2
3
8
9
4
7
6
5

3×1の右辺ベクトルbの各要素を入力してください。
42
114
102

求める連立一次方程式 Ax=b の解は
x[1] = 3.000000
x[2] = 6.000000
x[3] = 9.000000
```

(3)

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 114 \\ 102 \end{pmatrix} = b$$

となり、$Ax = b$ を満たすことが示された。