2005 年度　応用数学試験問題（山本有作）

（A4 サイズの資料持込み可，各問題毎に解答用紙 1 枚使用）

問題 1（李相潤くん出題 $\Rightarrow$ 成績 $=$ A）
関数 $f(x)$ の $x = x_0$ における 2 階微分 $f''(x_0)$ の近似値を刻み幅 h の中心差分で求めることを考える。

(1) 2 階の中心差分の式を書け。

(2) 2 階の中心差分の誤差は $O(h^2)$ であることを示せ。

(3) 2 階の中心差分の誤差が実際に $O(h^2)$ となることを確かめるため，2 つの関数 $f(x) = \exp(x)$ と $f(x) = x^5 - 15x^4 + 8x^3$ を選んで $x_0 = 1, 2, 3, 4$ における 2 階微分の近似値を $h = 0.1,\ 0.2$ として計算してみた。その結果は次のようになった。

表 1: $f(x) = \exp(x)$ の場合

x_0	解析値	h=0.1	誤差	$h = 0.2$	誤差	誤差 2/誤差 1
1	2.718282	2.720548	0.002266	2.727355	0.009073	4.004002
2	7.389056	7.395216	0.006160	7.413719	0.024663	4.004002
3	20.08554	20.10228	0.016744	20.15258	0.067041	4.004002
4	54.59815	54.64366	0.045514	54.78039	0.182237	4.004002

表 2: $f(x) = x^5 - 15x^4 + 8x^3$ の場合

x_0	解析値	h=0.1	誤差	$h = 0.2$	誤差	誤差 2/誤差 1
1	-112	-112.2	0.2	-112.8	0.8	4
2	-464	-464.1	0.1	-464.4	0.4	4
3	-936	-936	0	-936	0	—
4	-1408	-1407.9	0.1	-1407.6	0.4	4

$f(x) = \exp(x)$ の場合は予想通りの結果だったのに対し，$f(x) = x^5 - 15x^4 + 8x^3$ の場合は $x_0 = 3$ のときにいずれの h でも誤差が 0 となるという予想外の結果が出た。この原因を考えよ。

問題 2（山下徹也くん類題出題 $\Rightarrow$ 成績 $\geq$ B）
2 元連立常微分方程式の初期値問題

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

を考える。

(1) 方程式 (1) を解析的に解け。また，$t \to \infty$ のとき，解 $x(t)$，$y(t)$ はどのような振る舞いをするかを述べよ（ヒント： 係数行列を対角化することにより，2 本の独立な常微分方程式に変形せよ）。

(2) 方程式 (1) に対して刻み幅 h のオイラー法を適用したときの反復式を書け。

(3) 方程式 (1) に対して刻み幅 h のホイン法を適用したときの反復式を書け。

(4) $t \to \infty$ における解析解の振る舞いをオイラー法で求めた近似解が再現するには，ステップ幅 h はどんな範囲になければならないか。

問題 3（中島毅士くん出題 ⇒ 成績 = A）

対称行列 A の固有値を求めるヤコビ法の第 k ステップでは，次の操作を行うことにより，行列を対角行列に近づける。

$$A_k = G_k^t A_{k-1} G_k \tag{2}$$

ここで，A_{k-1} の絶対値最大の要素を $a_{pq}\,(= a_{qp})$ とするとき，G_k は次のように第 (p,p)，(p,q)，(q,p)，(q,q) 要素のみが単位行列と異なる行列である。

$$G_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & -\sin\theta & \cdots & \cos\theta & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(1) A_{k-1} の要素を a_{ij}，A_k の要素を a'_{ij} とするとき，θ は $a'_{pq} = 0$ となるように定める。この条件から $\tan 2\theta$ を a_{pp}，a_{pq}，a_{qq} を用いて表せ。

(2) 次の 3×3 行列の固有値をヤコビ法の第 2 ステップまで計算することにより求めよ。途中，G_1，G_2 も示せ。

$$\begin{pmatrix} 8 & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 4 & -3 \\ \sqrt{3} & -3 & 6 \end{pmatrix} \tag{4}$$