

ブラック-ショールズモデルの検証

西口健太郎 渡邊崇充

2004年7月8日

1 はじめに

危険資産の時刻 t における価格を S_t とするとき、収益率 dS_t/S_t は次のようにモデル化される。

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t \quad (1)$$

これをブラック-ショールズモデルと呼ぶ。

μ は資産の平均成長率 (確定的な収益) を意味し、ドリフトと呼ぶ。また、 dB_t はブラウン運動の増分であり、 σ はその確率的な変動の激しさを表し、ボラティリティと呼ばれる。一般に安定した会社の株価はドリフトは低いボラティリティも小さいため暴落などのリスクが小さく、一方、ベンチャー企業の株価はドリフトは高いボラティリティも大きいためリスクが大きい。このように、ブラック-ショールズモデルでは様々な危険資産をドリフトとボラティリティという2つのパラメータによって特徴付けている。

本発表では、株価データから、この2つのパラメータ『 μ 』と『 σ 』を推定する方法を説明する。そして、実際の株価データを用いて μ と σ を推定し、企業のタイプ別の μ と σ の傾向をみる。

2 株価データからのドリフトとボラティリティの推定法

ブラック-ショールズモデルでは、時刻 t における資産価格 S_t のシミュレーションは次の式である。

$$S_{t+1} = S_t \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_t\right\}, \quad t = 0, \dots, n, \quad n\Delta t = T \quad (2)$$

これは区間 $[0, T]$ を n 等分し、離散的な点でのシミュレーションを考えている。 Z_t は標準正規分布 $(N(0, 1))$ に従う。ここであらたに、 $r_t \equiv \log(S_t) - \log(S_{t-1})$ と定義すると、

$$r_t \equiv \log(S_t) - \log(S_{t-1}) \quad (3)$$

$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_t \quad (4)$$

式 (4) より、 r_t は正規分布で、平均 $\mu_r = E[r_t] = (\mu - \sigma^2/2)\Delta t$ 、分散 $\sigma_r^2 = \text{Var}[r_t] = \sigma^2\Delta t$ である。また、 $r_t (t = 1, \dots, n)$ は独立でお互いに相関はないものとする。

次に、 $r_t (t = 1, \dots, n)$ の標本平均 \bar{r} と標本標準偏差 s_r は定義より

$$\bar{r} = \frac{\sum_{t=1}^n r_t}{n}, \quad s_r = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2} \quad (5)$$

なので、式 (4) を代入して \bar{r} 、 s_r を求めると、

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_t \right\} \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \frac{1}{n}\sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{t=1}^n Z_t \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
s_r &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n \left\{ \sigma \sqrt{\Delta t} Z_t - \frac{1}{n} \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{t=1}^n Z_t \right\}^2} \\
&= \sigma \sqrt{\Delta t} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n \left(Z_t - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t \right)^2}
\end{aligned} \tag{7}$$

となる。 $n \rightarrow \infty$ では、 $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t \rightarrow 0$ 、 $\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n Z_t^2 \rightarrow \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t^2$ から、 $\bar{r} \rightarrow \mu_r$ 、 $s_r \rightarrow \sigma_r$ と一致する。したがって、

$$\bar{r} = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t, \quad s_r = \sqrt{\Delta t} \cdot \sigma \tag{8}$$

したがって、式 (8) より推定されるドリフト $\hat{\mu}$ とボラティリティ $\hat{\sigma}$ は、

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{r}}{\Delta t} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} = \frac{\bar{r}}{\Delta t} + \frac{s_r^2}{2\Delta t}, \quad \hat{\sigma} = \frac{s_r}{\sqrt{\Delta t}} \tag{9}$$

である。つまり実際の株価データである $S_t (t = 0, \dots, n)$ から、式 (3)、式 (5) を使って \bar{r} と s_r を求め、それらを式 (9) に代入することでドリフトとボラティリティを求めることができる。

3 実際の株価データを使った推定

実際の企業の株価データから、ドリフト $\hat{\mu}$ とボラティリティ $\hat{\sigma}$ を推定する。その企業は、

Goodys Family Clothing. Hemptown Clothing Inc. The Walt Disney Co. Northwest Airlines Inc. AMD. One Link 4 Travel Inc. Del Monte Foods Co. NCL Building Systems, Inc.

の 8 社である。これらの企業の 2004 年 4 月 1 日から 2004 年 6 月 30 日の 3ヶ月間の株価データを用いる。下に縦軸に株価 [米ドル]、横軸に時間 [月] とした企業毎の 3ヶ月間の株価推移グラフと推定したドリフトとボラティリティを記す。また、パラメータは $\Delta t = 1$ (日)、 T (満期) = 61 (日間、3ヶ月間の取引日の合計) とした。

なお、この株価データは Yahoo! Finance (<http://finance.yahoo.com>) から入手した。

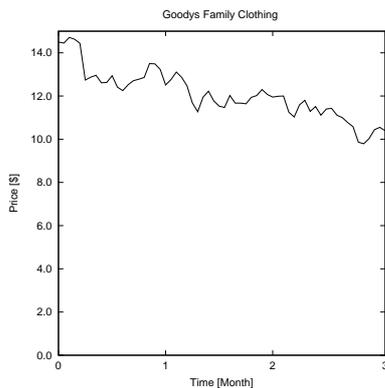


図 1: Goodys Family Clothing

$$\begin{aligned}
\hat{\mu} &= -0.0049 \\
\hat{\sigma} &= 0.033
\end{aligned}$$

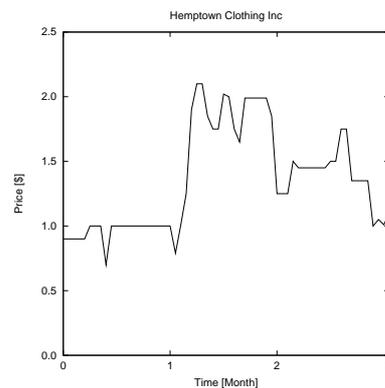
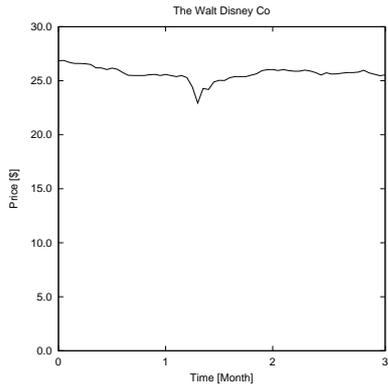


図 2: Hemptown Clothing Inc

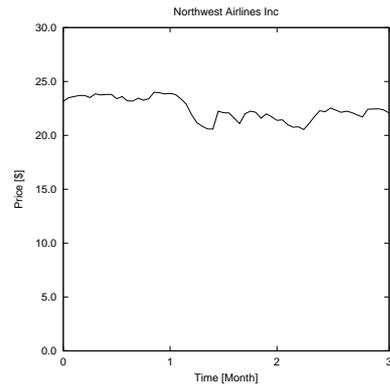
$$\begin{aligned}
\hat{\mu} &= 0.012 \\
\hat{\sigma} &= 0.14
\end{aligned}$$



☒ 3: The Walt Disney Co

$$\hat{\mu} = -0.00074$$

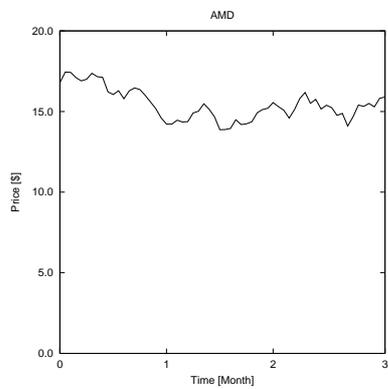
$$\hat{\sigma} = 0.013$$



☒ 4: Northwest Airlines Inc

$$\hat{\mu} = -0.00062$$

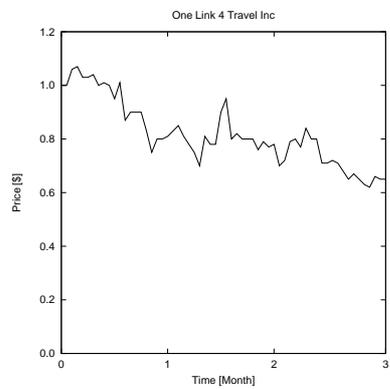
$$\hat{\sigma} = 0.019$$



☒ 5: Advanced Micro Devices Inc(AMD)

$$\hat{\mu} = 0.00054$$

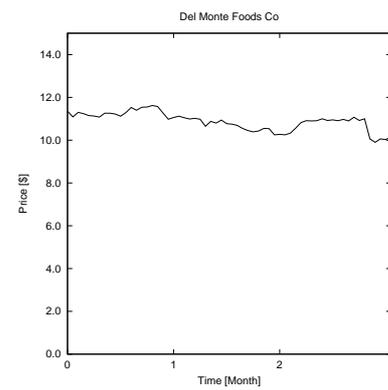
$$\hat{\sigma} = 0.027$$



☒ 6: One Link 4 Travel Inc

$$\hat{\mu} = -0.0053$$

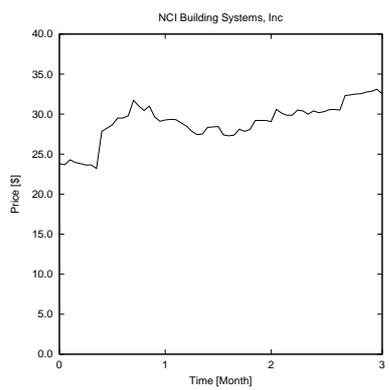
$$\hat{\sigma} = 0.059$$



☒ 7: Del Monte Foods Co

$$\hat{\mu} = -0.0017$$

$$\hat{\sigma} = 0.017$$



☒ 8: NCL Building Systems, Inc

$$\hat{\mu} = 0.0056$$

$$\hat{\sigma} = 0.030$$

4 まとめ

- ・ 同業種の大企業とベンチャー企業では株価推移には違いがみられ、ベンチャー企業のほうが株価の変動の様子が激しい。
- ・ 実際の株価データからドラフトとボラティリティを計算したところ、大企業はドリフトは低いが、ボラティリティは小さく、またベンチャー企業のドリフトは高いが、ボラティリティも大きいという結果であった。
この結果から、大企業（一般的に安定している企業）はリスクが小さく、ベンチャー企業がリスクが大きいことが確認できた。
- ・ 今回の発表では、業種の違いによる株価推移の差をはっきりと確認することはできなかった。
ただ、若干ではあるが旅行会社の株価推移の様子には不安定さが見受けられた。