

2004年度 応用数理工学特論 第2回レポート課題

280467168 松場 弘明

問題 1

(1)

プットオプションを売ったことによる利益： $-\max(K - S_T, 0)$

コールオプションを買ったことによる利益： $\max(S_T - K, 0)$

よってこれらを同時に行った場合の利益を Pay とすると、Pay はこれらの和で表され、

$$Pay = -\max(K - S_T, 0) + \max(S_T - K, 0)$$

ここで、

$$K \geq S_T \text{ のとき : } Pay = -(K - S_T) + 0 = S_T - K$$

$$K < S_T \text{ のとき : } Pay = 0 + (S_T - K) = S_T - K$$

よって結局、

$$Pay = S_T - K.$$

(2) 時刻 t において、株式は S_t である。また、銀行から借りた Ke^{-rT} は、 $Ke^{-r(T-t)}$ に従う。したがって、時刻 T でポートフォリオを清算して得られる利益 Port は、

$$Port = \{S_t - Ke^{-r(T-t)}\}_{t=T} = S_T - K,$$

となり、これは (1) で計算した利益と同じである。

(3) 無裁定原理 (2つの資産の価値が $t = T$ で等しいならば、 $t = 0$ でも等しい) より、(1)、(2) の $t = 0$ での資産価値は等しいことがわかる。(1) の $t = 0$ での価値は $C - P$ 、(2) の $t = 0$ での価値は $S_0 - Ke^{-r(T-t)}$ である。よって、

$$C - P = S_0 - Ke^{-rT}$$

また、これより、

$$P = C - S_0 + Ke^{-rT}$$

これにブラックショールズの公式：

$$C(t, S_0) = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

を代入すると、プットオプションの価格公式：

$$P = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - S_0 + Ke^{-rT}.$$

但し、

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(V + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(V - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

であり、

$$\Phi(Z) = \int_{-\infty}^Z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

である。

問題 2

- (1) Intel Corporation の各行使価格に対する実際のコールオプション価格のデータを以下の図 1 に示す。なお、オプションの満期は 1 年後の 2005 年 6 月である。

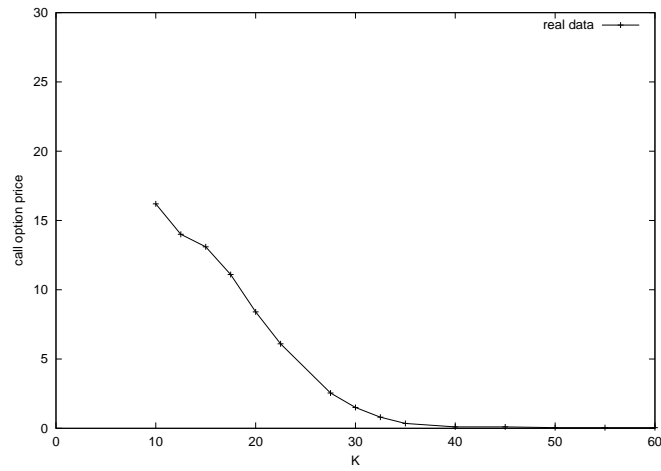


図 1: 行使価格 K に対するコールオプション価格

- (2) 同じオプションに対する価格をブラックショールズ公式を使って求めたものを (1) の実際の価格とともに示す。但し各パラメータ値は $S_0 = 27.52$, $r = 0.00995$, $\sigma = 0.25$, $T = 1.0$ とした。結果は、満期を 1 年と少し長めにとったにも関わらず実際のデータとよく一致している。

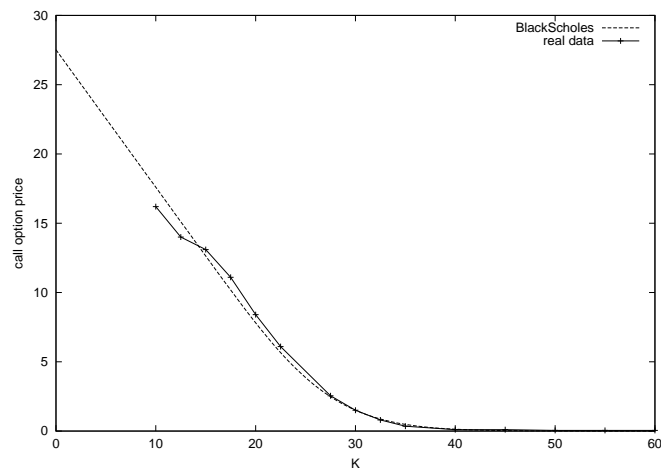


図 2: ブラックショールズ公式による結果と実際のデータ

問題 3

- (1) $K = 30, T = 1.0, r = 0.00995, \sigma = 0.25$ とした。安定条件を満たす M は $M \geq 100$ であった。以下に $M = 110$ としたときの、初期資産価格に対するオプション価格を図 3 に示す。

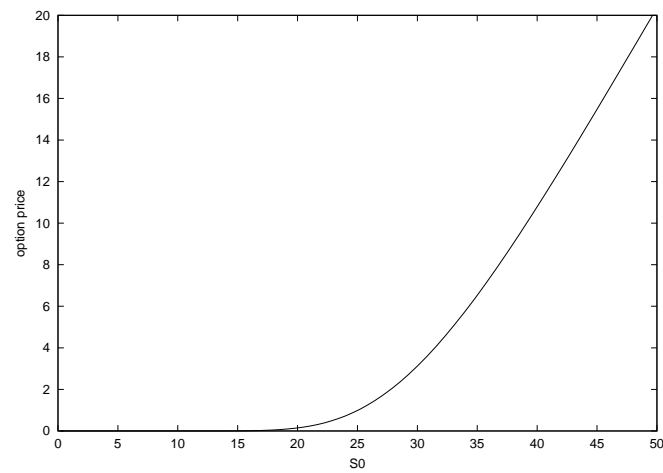


図 3: 陽的解法 ($M = 110$)

- (2) 上記 (1) と同じ条件で、安定条件を満たさないように、 M だけを $M = 90$ としてオプション価格を求めた。このとき、解は振動した。

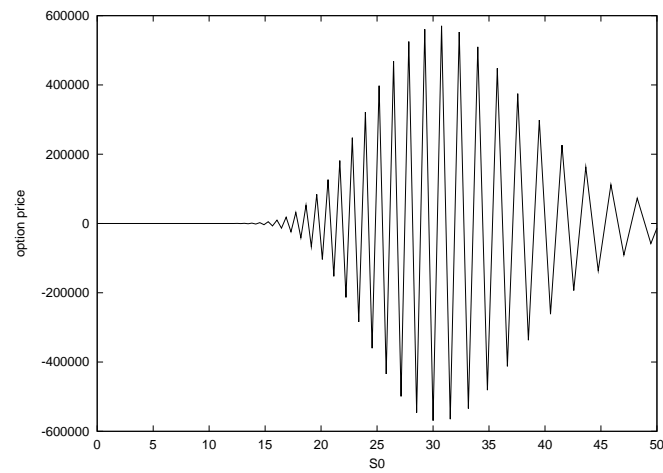


図 4: 陽的解法 ($M = 90$)

- (3) 上記 (2) と同じ条件で解法を陰的解法にしてオプション価格を求めた。すると解は振動せず、正しく求められた。

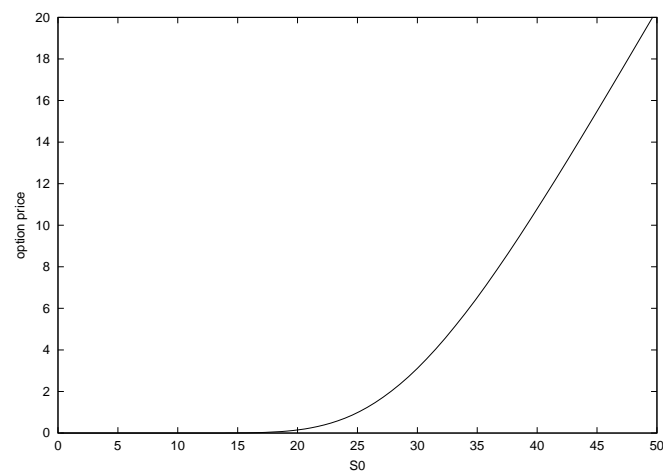


図 5: 陰的解法 ($M = 90$)