2004年度 応用数理工学特論 第1回レポート

計算理工学専攻 280367031 畝山多加志

平成 16 年 5 月 10 日

問題 1

(1) Microsoft Corporation (現時点での株価 $S_0 = \$26.33$) のコールオプション (満期 2004 年 7 月) は以下のようであった (2004/5/5 のデータ, CBOE)。

行使価格 K[$]	オプション価格 [$]
5.00	21.90
7.50	19.40
10.00	15.80
12.50	16.20
15.00	10.50
17.50	10.20
20.00	6.70
22.50	4.40
25.00	1.90
27.50	0.60
30.00	0.15
32.50	0.05
35.00	0.05
37.50	0.05
40.00	0.05
42.50	0
45.00	0

(2) (1) のデータをグラフにすると図 1 のようになる。また、様々な満期に対するデータを同様にグラフにすると図 2 のようになる。行使価格が低いほどオプション価格が上がっているのがわかる。また、行使価格が同一でも満期が先であるほど価格が上がっている。

問題 2

(1) 現在価値の等しい異なるキャッシュフローを交換する契約。同じ通貨で異なるタイプの利息を交換する金利スワップ、異なる通貨の利息を交換する通貨スワップ等がある。

(2) 例えば、固定金利と変動金利を交換する金利スワップが挙げられる。借入れをする場合を例として考える。

固定金利で借り入れをする場合、金利が上昇しても借入れ時の金利で支払えばいいため、利益が生じる。ところが金利が低下すると、借入れ時の高い金利を支払う必要が生じ、損失が発生する。一方、変動金利で借り入れをする場合、金利が低下すれば支払うべき金利も下がるため、利益が生じる。しかしながら金利が上昇すると、借入れの時点での金利より高い金利を支払わなくてはならないために損失が生じる。

固定金利と変動金利の利息をスワップすれば損失を押さえることができる。固定金利で借入れをしているときに変動金利とスワップ契約をすることで、金利が下がった場合にはその時点での市場の金利を支払うだけでよくなる (金利が上がった場合には権利を行使せず借入れ時の金利を支払う)。また、変動金利で借入れをしているときに固定金利とスワップ契約することで、金利が上がった場合には借入れ時の金利を支払うだけでよくなる (金利が下がった場合には権利を行使せずその時点での市場の金利を支払う)。

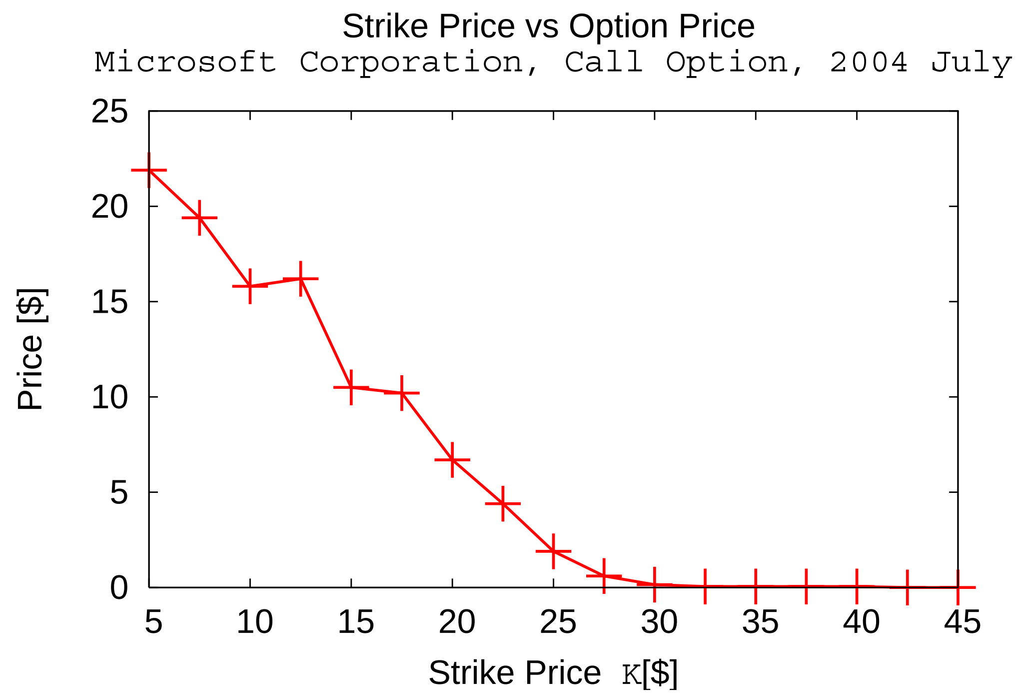

図 1: Microsoft Corporation の行使価格とコールオプション価格の関係 (満期 2004 年 7 月)

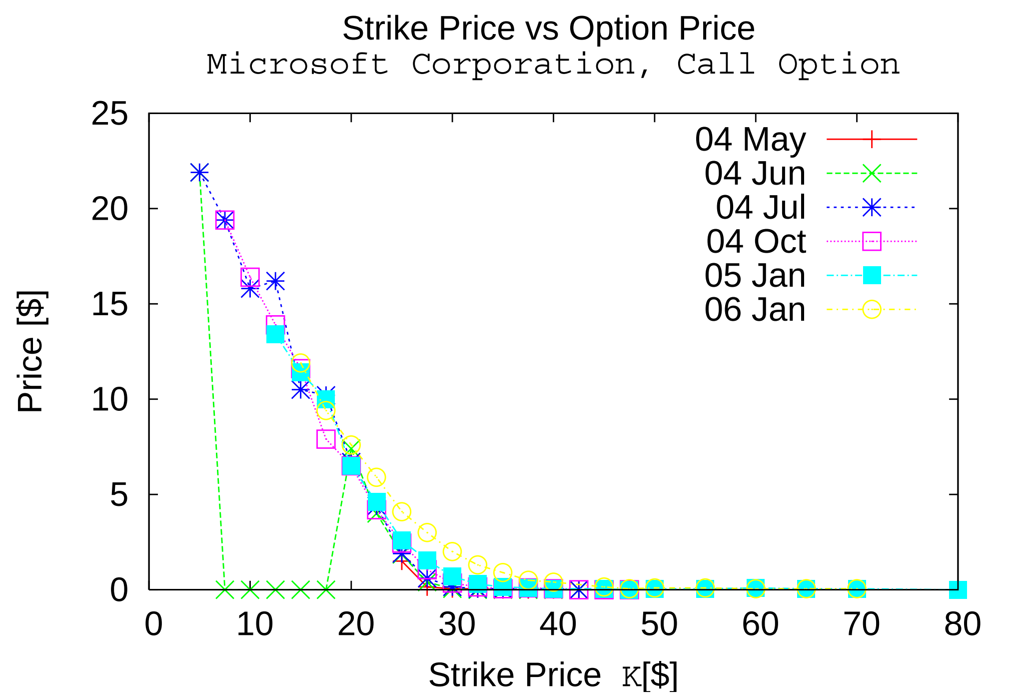

図 2: Microsoft Corporation の行使価格とコールオプション価格の関係

問題 3

(1) $S_T \geq K$ の場合、プットオプションを買った側は権利を行使せず、市場で価格 S_T で売却を行う。この場合の損失は 0 である。一方 $S_T < K$ の場合、プットオプションを買った側は権利を行使して価格 K で売却を行う。この場合には損失 $K - S_T$ が生じる。以上から、ある資産に対する行使価格 K のプットオプションを売った場合、満期 T における損失は

$$\max(K - S_T, 0) \tag{1}$$

である。

(2) ある資産に対する満期 T 行使価格 K の先物買いを行った場合の利益は

$$S_T - K \tag{2}$$

である。一方、同じ資産に対する同じ満期・行使価格のコールオプションを買った場合の利益は

$$\max(S_T - K, 0) \tag{3}$$

であり、プットオプションを売った場合の利益は (1) の答えより

$$-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0) \tag{4}$$

である。従ってコールオプションを買い、かつプットオプションを売った場合の利益は

$$\max(S_T - K, 0) + \min(S_T - K, 0) = S_T - K \tag{5}$$

であり、これは先物買いを行った場合の利益と等価である。

問題 4

(1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ より

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x f(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d(x-\mu)\, \frac{x-\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] + \mu \int_{-\infty}^{\infty} d(x-\mu)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= \mu
\end{aligned} \tag{6}$$

(2) (1) の答えより分散は $\left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle (x-\mu)^2 \right\rangle$ となる。$\alpha = 1/2\sigma^2$ とすれば

$$\begin{aligned}
\left\langle (x-\mu)^2 \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (x-\mu)^2 f(x) \\
&= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left[-\alpha (x-\mu)^2\right] \\
&= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\
&= 1/2\alpha \\
&= \sigma^2
\end{aligned} \tag{7}$$